Модуль числа

В данной статье обсуждается определение модуля, а также простейшие уравнения и неравенства с модулем.

Модуль числа и уравнения с модулем — тема особенная, прямо-таки заколдованная :-) Она совсем не сложная, просто в школе её редко объясняют нормально. В результате без специальной подготовки почти никто из школьников не может дать правильное определение модуля и уж тем более решить уравнение с модулем. И эту картину мы наблюдаем на протяжении многих лет.

Поэтому осваивайте тему «Уравнения и неравенства с модулем» по нашим статьям и на наших занятиях! Вы сумеете обойти множество конкурентов на ЕГЭ, олимпиадах и вступительных экзаменах.

Модуль числа называют ещё абсолютной величиной этого числа. Попросту говоря, при взятии модуля нужно отбросить от числа его знак. В записи положительного числа и так нет никакого знака, поэтому модуль положительного числа равен ему самому. Например, $|5| = 5$. Модуль нуля равен нулю. А модуль отрицательного числа равен противоположному ему положительному (без знака!). Например, $|-7| = 7$, $|-9,36| = 9,36$.

Обратите внимание: модуль числа всегда неотрицателен: $|x| \geqslant 0$.

Определение модуля

Вот оно:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

От большинства известных из школы определений оно отличается лишь одним: в нём есть выбор. Есть условие. И в зависимости от этого условия мы раскрываем модуль либо так, либо иначе.

Так же, как в информатике — в разветвляющихся алгоритмах с применением условных операторов. Как, вообще-то, и в жизни: сдал ЕГЭ на минимальный балл — можешь подавать документы в ВУЗ. Не сдал на минимальный балл — можешь идти в армию :-)

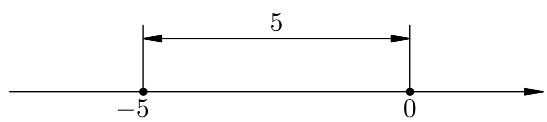
Таким образом, если под знаком модуля стоит выражение, зависящее от переменной, мы раскрываем модуль по определению. Например,

$$|2x-5| = \begin{cases} 2x-5, & \text{если } 2x-5 \geqslant 0; \\ 5-2x, & \text{если } 2x-5 < 0. \end{cases}$$

В некоторых случаях модуль раскрывается однозначно. Например, $|x^2+y^2| = x^2+y^2$, так как выражение под знаком модуля неотрицательно при любых x и y. Или: $|-z^2-1| = z^2+1$, так как выражение под модулем неположительно при любых z.

Геометрическая интерпретация модуля

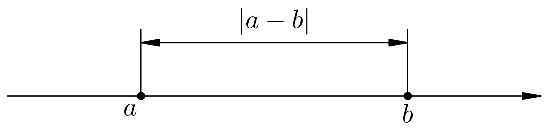
Нарисуем числовую прямую. *Модуль числа — это расстояние от нуля до данного числа.* Например, $|-5| = 5$. То есть расстояние от точки -5 до нуля равно 5.



Эта геометрическая интерпретация очень полезна для решения уравнений и неравенств с модулем.

Рассмотрим простейшее уравнение $|x| = 3$. Мы видим, что на числовой прямой есть две точки, расстояние от которых до нуля равно трём. Это точки 3 и -3. Значит, у уравнения $|x| = 3$ есть два решения: $x = 3$ и $x = -3$.

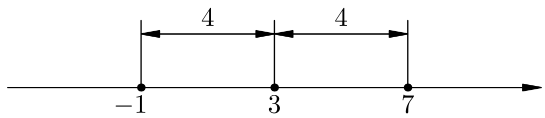
Вообще, если имеются два числа a и b, то $|a-b|$ равно расстоянию между ними на числовой прямой.



(В связи с этим нередко встречается обозначение $|AB|$ длины отрезка AB, то есть расстояния от точки A до точки B.)

Ясно, что $|a-b| = |b-a|$ (расстояние от точки a до точки b равно расстоянию от точки b до точки a).

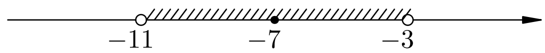
Решим уравнение $|x-3| = 4$. Эту запись можно прочитать так: расстояние от точки x до точки 3 равно 4. Отметим на числовой прямой точки, удовлетворяющие этому условию.



Мы видим, что наше уравнение имеет два решения: -1 и 7. Мы решили его самым простым способом — без использования определения модуля.

Перейдём к неравенствам. Решим неравенство $|x+7| < 4$.

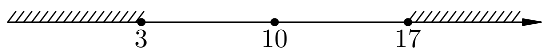
Эту запись можно прочитать так: «расстояние от точки x до точки -7 меньше четырёх». Отмечаем на числовой прямой точки, удовлетворяющие этому условию.



Ответ: $(-11; -3)$.

Другой пример. Решим неравенство $|10-x| \geqslant 7$.

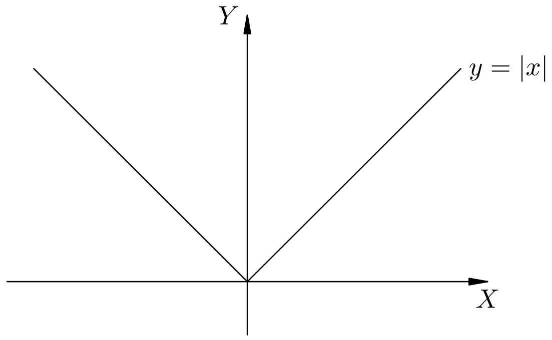
Расстояние от точки 10 до точки x больше или равно семи. Отметим эти точки на числовой прямой.



Ответ: $(-\infty; 3] \cup [17, +\infty)$.

График функции $y = |x|$

Этот график надо знать обязательно. Для $x \geqslant 0$ имеем $y = x$. Для $x < 0$ имеем $y = -x$. В результате получаем:



С помощью этого графика также можно решать уравнения и неравенства.

Корень из квадрата

Нередко в задачах ЕГЭ требуется вычислить $\sqrt{a^2}$, где a – некоторое число или выражение. Не забывайте, что

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Действительно, по определению арифметического квадратного корня $\sqrt{a^2}$ — это такое неотрицательное число, квадрат которого равен a^2. Оно равно a при $a \geqslant 0$ и $-a$ при $a < 0$, т. е. как раз $|a|$.

Примеры заданий ЕГЭ

1. Найдите значение выражения $x + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ при $x < 2$.

Заметим, что $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2| = 2-x$ при $x < 2$. Следовательно, значение нашего выражения равно: $x + 2 - x = 2$.

2. Найдите значение выражения $\sqrt{(a-6)^2} + \sqrt{(a-10)^2}$ при $6 \leqslant a \leqslant 10$.

Действуем аналогично:

$$\sqrt{(a-6)^2} + \sqrt{(a-10)^2} = |a-6| + |a-10| = a - 6 + 10 - a = 4.$$

В следующей статье мы рассмотрим более сложные уравнения и неравенства с модулем, относящиеся к части C заданий ЕГЭ, а также методы их решения.