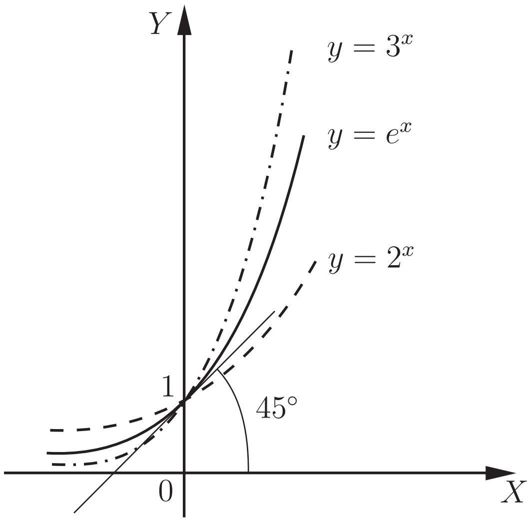
Число e

С замечательным числом e мы впервые встречаемся, начиная изучать показательную функцию, логарифмы и производные. Поэтому для лучшего понимания мы рекомендуем вам прочитать наши статьи «Показательная функция» и «Геометрический смысл производной».

В статье «Показательная функция» мы говорили о важнейшем свойстве функции $y = a^x$ — при $a > 1$ эта функция очень быстро растет. И не просто «быстро растет» — чем больше x, тем больше скорость ее роста, тем круче идет график. Можно сказать, что с увеличением x растут и значения показательной функции, и ее производная. А если аргументом показательной функции $y = a^t$ является время, то при $a > 1$ такая функция является математическим выражением стремительно развивающегося процесса.

Среди показательных функций есть особенная. Называется она экспонента, ее формула $y = e^x$. Особенность ее в том, что в каждой точке скорость роста этой функции равна значению самой функции в этой точке. Другими словами, $(e^x)' = e^x$, то есть производная функции $y = e^x$ равна ей самой.

Нарисуем несколько графиков функции $y = a^x$ при $a = 2$, $a = 3$, а также при $2 < a < 3$. Среди этих графиков есть такой, что касательная к нему, проведенная в точке $x = 0$, идет ровно под углом $45°$ к положительному направлению оси OX.



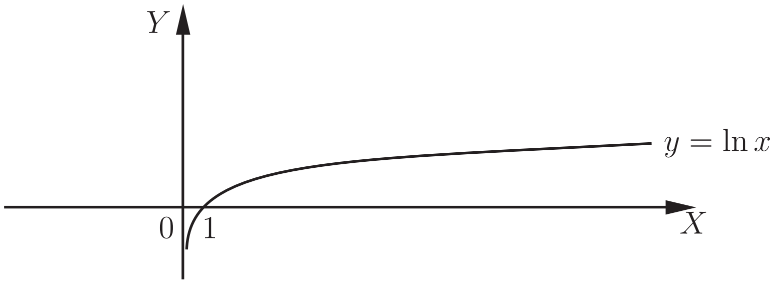
Это и есть график функции $y = e^x$. Само число e — иррациональное, то есть выражается бесконечной непериодической десятичной дробью. Приблизительно оно равно 2,718.

Логарифм по основанию e называется натуральным и обозначается $\ln x$. Если в уравнении или неравенстве вам встретились такие логарифмы, вы работаете с ними так же, как и с любыми другими, у которых основание больше 1.

Функция $y = \ln x$ также обладает интересным свойством:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Это значит, что с ростом x график логарифмической функции идет более и более полого, скорость роста его уменьшается, что мы и видим.



Формулы для производных функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$ содержат в себе выражение $\ln a$:

$$(a^x)' = (a^x) \cdot \ln a;$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Число e, как и число π, является одной из мировых констант. Так называют числа, которые можно встретить в математических формулах, выражающих фундаментальные законы природы, — в физике, статистике, биологии или экономике.

Число π известно людям с глубокой древности. Оно равно отношению длины окружности к ее диаметру. А вот с числом e (названным так в честь великого математика Леонарда Эйлера) человечество познакомилось намного позже. Впервые его вычислил математик Якоб Бернулли в начале XVIII века, причем сделал это, решая чисто практическую задачу о начислении процентов на банковский вклад.

В задании B12 вариантов ЕГЭ вам уже встречались задачи, где вклад величиной x помещен в банк под p % годовых. Найти нужно было, например, каким станет вклад через два года. Рассказывая о решении таких задач, мы вывели удобные формулы:

если величину x увеличить на p процентов, получится $x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$;

если величину x дважды увеличить на p процентов, получим $x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$. Именно таким станет вклад через два года;

а если вклад пролежит в банке n лет, его величина станет равной $x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$.

Итак, если вклад поместить банк под 10% годовых, он вырастет за год в 1,1 раз, за два года — в 1,21 раза, за десять — примерно в 2,6 раза. Значит, рост вклада зависит от того, сколько он пролежит в банке, то есть сколько раз начисляются проценты. А что будет через сто лет? А если найти такой банк, где процент начисляется не раз в год, а раз в день? И пусть даже каждый день начисляется совсем небольшой процент, но ведь дней-то много! Верно ли, что можно положить в такой банк один доллар под одну сотую процента в день, а через пару десятков лет забрать из банка миллион?

Давайте так и сформулируем задачу. Пусть банк начисляет каждый день по одной сотой процента. Во сколько раз вырастет вклад через 10000 дней (это двадцать семь с лишним лет)? Иными словами, чему приближенно равна величина $\left(1+\frac{1}{10000}\right)^{10000}$? И к чему будет стремиться величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, если n стремится к бесконечности?

Вот такую задачу и решал Бернулли. Если n будет очень большим, или, как говорят математики, бесконечно большим, будет стремиться к бесконечности (то есть больше миллиона, больше миллиарда, больше двух миллиардов…) — то величина $\frac{1}{n}$ будет, наоборот, очень малой. Можно сказать, что $\frac{1}{n}$ будет стремиться к нулю.

Оказывается, что в этом случае величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ будет стремиться к числу e. Если банк каждый год начисляет по 1%, через 100 лет вклад увеличится примерно в e раз (напомним, что $e \approx 2{,}718$). Еще большая точность будет достигнута, если каждый день банк начисляет по 0,01 процента. Через 10000 дней вклад увеличится примерно в e раз. Итак, если n стремится к бесконечности, то величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ стремится к числу e.

Этот неожиданный факт называется вторым замечательным пределом. Вы встретитесь с ним в курсе математического анализа.