Числовые множества

ЕГЭ по математике — экзамен чисто практический. Однако знания о том, какие бывают числа, необходимы при решении многих задач.

Первые числа, которыми люди начали пользоваться в доисторические ещё времена — это *натуральные числа*, то есть целые и положительные: 1, 2, 3, ...

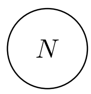
Натуральные числа — это числа, применяемые для счёта предметов. Натуральные числа можно использовать в качестве номеров.

Наименьшее натуральное число — единица[1]. Числа 21, 249, 30988 являются натуральными. Все вместе они составляют *множество натуральных чисел*, обозначаемое буквой N:

$$N = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Что же такое *множество*? Это одно из первичных понятий математики, т. е. таких, которые лежат в основе логической системы и уже не определяются через другие понятия. Интуитивно мы понимаем, что множество — это набор или совокупность элементов, объединенных каким-либо общим признаком.

Множества обычно обозначаются заглавными буквами. Множество натуральных чисел мы можем условно изобразить вот так:



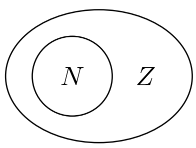
Но числа бывают не только натуральными. Индийцы изобрели число ноль и отрицательные числа. Теперь они для нас привычны, но когда-то европейцы — древние греки и римляне — долгое время обходились без нуля. Сейчас нам трудно это представить.

Натуральные числа, целые отрицательные числа и ноль вместе составляют множество *целых* чисел, которое обозначается Z:

$$Z = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots\}.$$

Например, получая в тригонометрическом уравнении серию решений, мы пишем: $n \in Z$, и это означает, что n — целое число.

Очевидно, множество целых чисел включает в себя множество натуральных:



Кроме целых чисел, однако, имеются ещё и дроби.

Напомним, что дробь — это часть, доля, выражение вида p/q (где p — целое, а q — натуральное). Например, $1/3$ — это «одна часть из трёх», $0,25$ — это двадцать пять сотых. Десятичные дроби также можно записать в виде p/q. Например, $0,25 = 25/100 = 1/4$. А если вы вдруг забыли, как десятичную дробь перевести в обыкновенную, как складывать и умножать дроби или как их сокращать — срочно обращайтесь к нам за консультацией! Без этих простейших навыков готовиться к ЕГЭ будет крайне сложно.

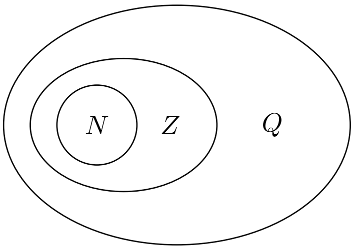
[1] В школьной математике ноль не является натуральным числом. Мы ведь не используем его для счёта предметов. Ну какой здравомыслящий человек скажет: «На столе стоит ноль чашек»? :-)

Целые числа (положительные и отрицательные) также можно записать в виде p/q. Например, в виде дроби со знаменателем 1:

$$2 = \frac{2}{1}, \quad 0 = \frac{0}{1}, \quad -5 = \frac{-5}{1}.$$

Стало быть, целые числа — частный случай дробей.

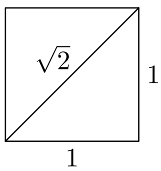
Числа, которые можно записать в виде дроби p/q, называются *рациональными*. Множество рациональных чисел обозначается Q. Ясно, что оно включает в себя множество целых чисел.



Хорошо, но любое ли число можно записать в виде дроби p/q? Иными словами, все ли числа являются рациональными?

Долгое время — в античности — считалось, что любое число можно записать в виде дроби с числителем и знаменателем. Дело в том, что для древних греков числа и их соотношения были почти священны. Пифагорейцы говорили: «Числа правят миром». Они верили, что все основные принципы мироздания можно выразить языком математики, что соотношения чисел выражают гармонию, закон и порядок природы, перед которым склоняют голову даже олимпийские боги. Греческое искусство, особенно архитектура, подчинялось правилам, канонам. Греки точно установили, какими должны быть пропорции в архитектуре — например, отношение диаметра колонны к её длине — чтобы здание было гармоничным. И все эти пропорции были отношениями целых чисел.

Однако в стройной и гармоничной системе божественных пропорций наметилась досадная брешь. Оказалось, что отношение диагонали квадрата к его стороне не выражается отношением целых чисел! Другими словами, если мы нарисуем квадрат со стороной 1, его диагональ не выражается никакой дробью вида p/q.



По теореме Пифагора диагональ такого квадрата равна $\sqrt{2}$ — то есть положительному числу, квадрат которого равен двум. Можно доказать, что это число не является рациональным. Но сами пифагорейцы не сразу смогли смириться с тем, что $\sqrt{2}$ невозможно записать в виде p/q — ведь это наносило удар всей их философской системе!

Открытие долго держалось в тайне, пока наконец ученик Пифагора Гиппас не разгласил его. За это Гиппас был изгнан из школы Пифагора и вскоре погиб во время кораблекрушения, в чём современники увидели несомненное возмездие богов. А числа, которые невозможно записать в виде p/q, такие, как $\sqrt{2}$, назвали иррациональными, то есть не-разумными, неправильными.

Но иррациональные числа ничуть не хуже рациональных! Они отнюдь не ограничиваются выражениями вида $\sqrt{2}$ или $\sqrt{3}$. К ним относятся также:

- число π — отношение длины окружности к её диаметру;
- число e, названное в честь Эйлера (об этом числе мы ещё расскажем);

- задающее золотое сечение число φ — удивительное число Фибоначчи, вокруг которого построен весь детективный сюжет фильма «Код да Винчи»;
- числа вида $\log_2 5$, $\sin 23°$, ...;
- необозримое количество других чисел.

Ещё раз повторим, в чём разница между рациональными и иррациональными числами.

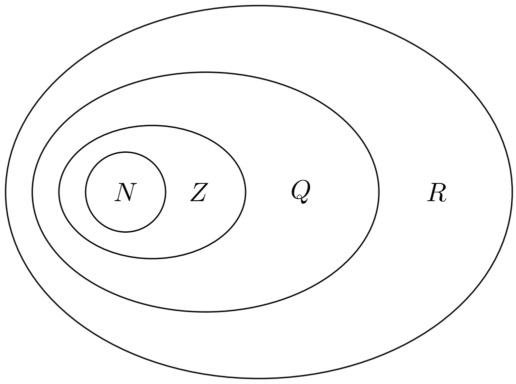
Рациональное число можно представить в виде дроби p/q — например, $1/3$, $7/11$. А если мы просто поделим в столбик 7 на 11, мы обнаружим интересную закономерность:

$$7 : 11 = 0,636363636363\ldots$$

Мы видим, что цифры повторяются, то есть дробь является периодической. Таким образом, *любое рациональное число можно записать десятичной дробью — конечной или бесконечной периодической.*

А вот в числе $\pi = 3,1415926\ldots$ цифры не заканчиваются, и никакой периодичности их следования не наблюдается. *Иррациональные числа — это бесконечные непериодические дроби.*

Вместе оба множества — рациональных и иррациональных чисел — образуют множество *действительных* (или *вещественных*) чисел, которое обозначается R (от слова real).



Возникает вопрос: это всё? Все ли числа, какие только могут быть, содержатся в множестве действительных чисел? Или за его пределами ещё что-то есть?

Для успешной сдачи ЕГЭ других чисел не нужно. Да и, казалось бы, мы назвали все возможные числа. Но вот какой парадокс: положительные и отрицательные числа симметрично расположены на числовой прямой, верно? И при этом из положительных чисел можно извлечь квадратный корень, а из отрицательных — нельзя! Не существует действительного числа, которое при возведении в квадрат даёт -1.

Оказывается, однако, что существует числовое множество, содержащее в себе множество R и бесконечное множество других чисел, не являющихся действительными. В этом множестве находится мнимая единица i, для которой верно $i^2 = -1$. И называется оно *множеством комплексных чисел.*

Комплексные числа служат естественным языком описания многих физических явлений. Те из вас, кто выбрал инженерную специальность (в особенности связанную с распространением волн, электротехникой и радиофизикой), непременно встретятся с ними. В отличие от действительных («вещественных») чисел, применяемых для описания материального, плотного мира «вещей», комплексные числа оказываются удобным инструментом для построения математических моделей волн и колебаний всевозможной природы.

Ну а будущим физикам наверняка интересно будет узнать, что элементарные частицы живут и взаимодействуют по законам именно комплексных чисел. Наукой, описывающей комплексный микромир, является квантовая физика.