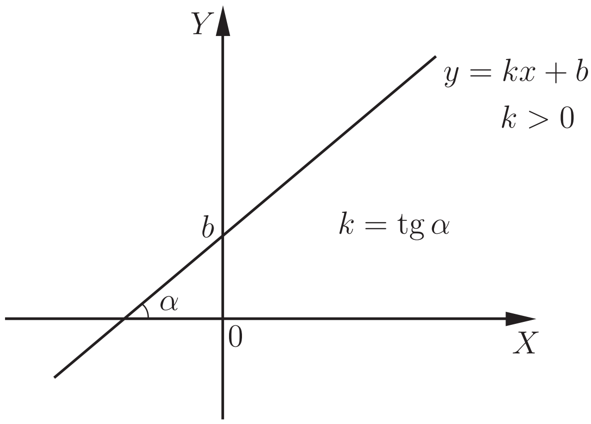
Степенная функция

Степенны́ми называют функции вида x^α, где α может быть целым, дробным, положительным или отрицательным. К ним относятся всем знакомая линейная функция $y = kx + b$, квадратичная парабола $y = x^2$ (в общем виде: $y = ax^2 + bx + c$), кубическая парабола $y = x^3$. Степенными являются также гипербола $y = 1/x$, которую можно представить как $y = x^{-1}$, функция $y = \sqrt{x}$ (ведь $\sqrt{x} = x^{1/2}$), $y = \sqrt[3]{x}$ и многие другие.

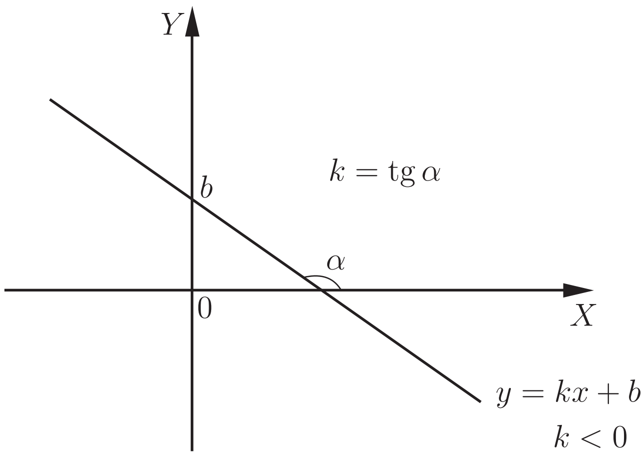
Расскажем подробно об этих функциях и их графиках.

1. Линейная функция $y = kx + b$. График — прямая линия. Для её построения достаточно двух точек.

Если $k > 0$, линейная функция возрастает. Чем больше k, тем круче идет график. Число k называется угловым коэффициентом прямой и равно тангенсу угла наклона этой прямой к положительному направлению оси X:

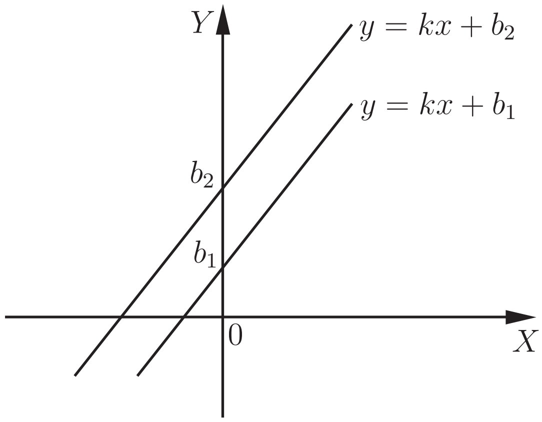


Если $k < 0$, линейная функция убывает. Очевидно, в этом случае угол α — тупой и $\operatorname{tg}\alpha < 0$.



Если $k = 0$, мы получим прямую $y = b$, параллельную оси X.

Если угловые коэффициенты прямых равны — прямые параллельны.

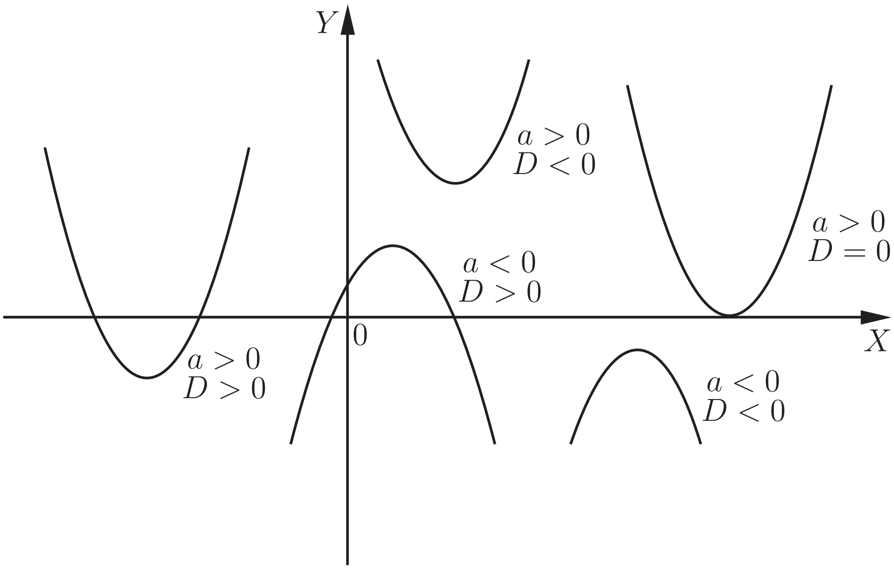


2. О квадратичной функции (параболе) $y = ax^2 + bx + c$ мы уже рассказывали. Кратко повторим основные моменты:

- Если $a > 0$, ветви параболы направлены вверх. Если $a < 0$ — вниз.
- Координаты вершины параболы находятся по формулам:

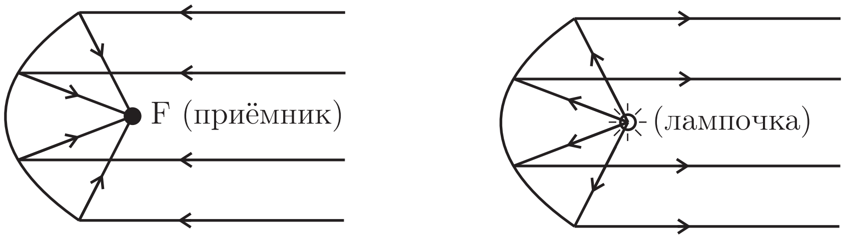
$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \qquad y_0 = y(x_0).$$

- Точки пересечения параболы с осью X находятся как корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Если корней нет (дискриминант уравнения меньше нуля), парабола не пересекает ось X.
- Точку пересечения параболы с осью Y находим, подставив в её уравнение $x = 0$.

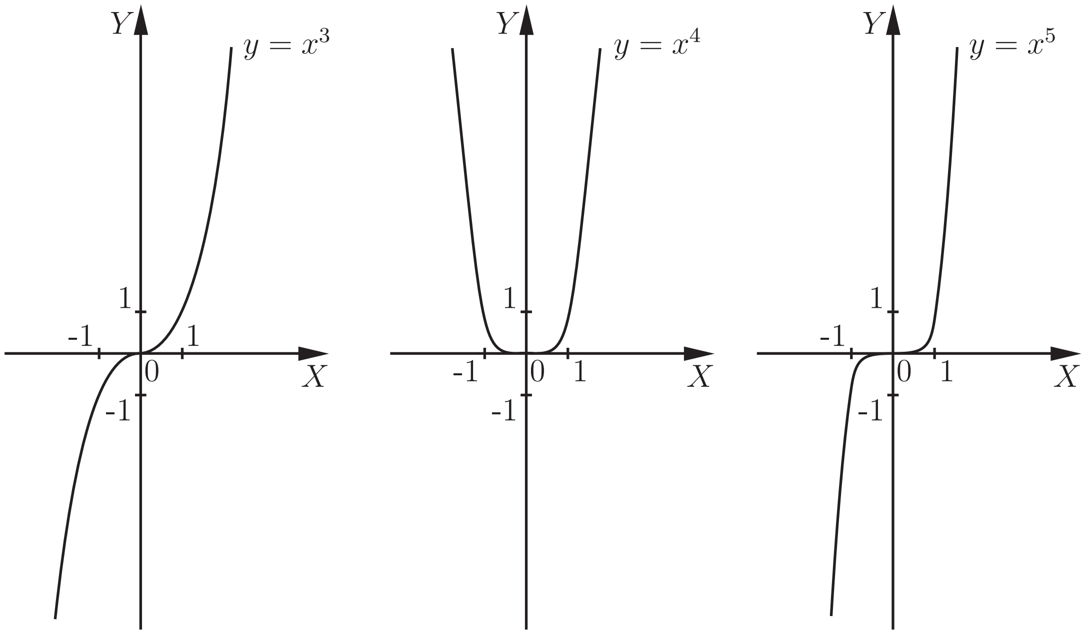


Мяч, брошенный под углом к горизонту, летит по параболе. Струя воды из фонтана или шланга, направленная под углом к горизонту, рисует в пространстве именно параболу. Но это не всё. Разберите карманный фонарик. Вы увидите, что за лампочкой расположено зеркальце, имеющее параболическую форму. Спутниковая антенна или антенна телескопа имеют форму параболы. Случайно ли это?

Оказывается, параболическое зеркало обладает интереснейшим свойством — весь поток света, падающий на его поверхность, оно собирает в одной точке, называемой фокусом параболы. Вот почему форма антенн — параболическая. И наоборот, если в фокусе параболы расположен источник света, то отражённые от зеркала лучи света будут параллельны. Поэтому карманный фонарик дает направленный луч света, хорошо видимый в темноте.



3. На рисунках функции $y = x^3$ (кубическая парабола), $y = x^4$ и $y = x^5$.



4. Заметим, что между функциями $y = x^2$ и $y = x^4$ есть определенное сходство. Оба этих графика симметричны относительно оси Y. Такие функции называются **чётными**.

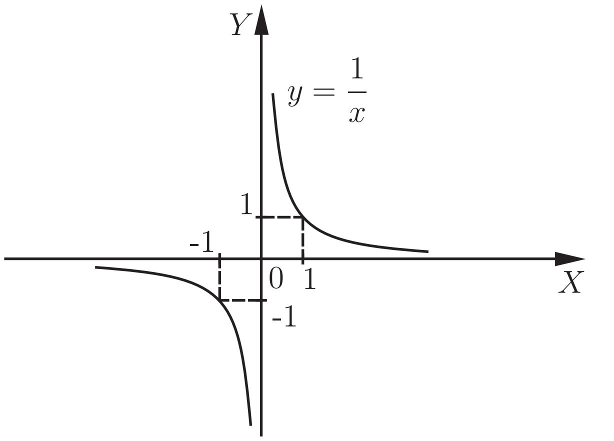
Определение. Функция $y = f(x)$ называется чётной, если:
1) область определения функции симметрична относительно нуля;
2) для каждого x из области определения выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Графики функций $y = x^3$ и $y = x^5$ симметричны относительно начала координат. Эти функции — нечётные.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется нечётной, если:
3) область определения функции симметрична относительно нуля;
4) для каждого x из области определения выполняется равенство
$f(-x) = -f(x)$.

Очевидно, функция $y = x^\alpha$ является чётной при чётных значениях α и нечётной при нечётных α.

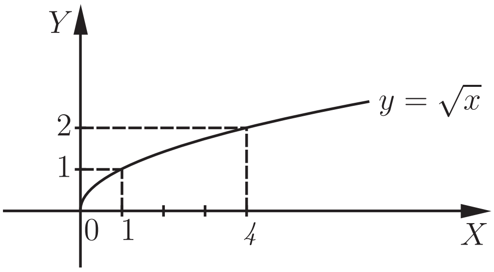
5. Функция $y = 1/x$ (гипербола) также относится к степенным. Ведь $1/x = x^{-1}$. Поскольку знаменатель не должен обращаться в ноль, эта функция не определена при $x = 0$. Гипербола является нечётной функцией. Её график симметричен относительно начала координат.



6. Построим график функции $y = \sqrt{x}$.

Выражение $\sqrt{x}$ определено при $x \geq 0$, поэтому область определения функции — все неотрицательные числа.

Кроме того, $y = \sqrt{x}$ принимает только неотрицательные значения, поскольку $\sqrt{x} \geq 0$.



Мы используем эти свойства при решении уравнений и неравенств. Уравнение вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ имеет смысл только при $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$. Это его область допустимых значений.

Существуют вопросы, ставящие в тупик почти любого абитуриента. Например, чему равен $\sqrt{a^2}$?

Правильный ответ: $\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$.

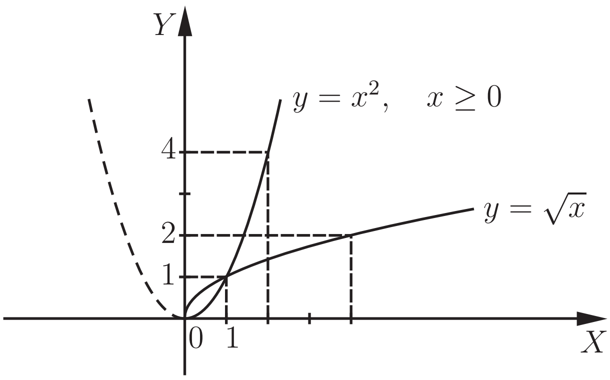
Запомните это. Проверить легко: возьмём, например, $a = -2$.

$(-2)^2 = 4$;

$\sqrt{4} = 2$.

Изобразим на одном графике параболу $y = x^2$ и функцию $y = \sqrt{x}$.

Сейчас нас интересует правая ветвь параболы, при $x \geq 0$. Мы видим, что эта часть параболы и график функции $y = \sqrt{x}$ словно нарисованы по одному шаблону, по-разному расположенному в координатной плоскости. Они симметричны относительно прямой $y = x$. То, что для одной из них — область определения, для другой — область значений.



Напомним, что такие функции называются **взаимно-обратными**. Подробно об этом можно прочитать в статье «Логарифмическая функция»).

7. Легко убедиться, что функция $y = \sqrt[3]{x}$ является обратной к функции $y = x^3$.