Тригонометрический круг. Текст к рисунку

Нарисована единичная окружность — то есть окружность с радиусом, равным единице, и с центром в начале системы координат. Той самой системы координат с осями OX и OY, в которой мы привыкли рисовать графики функций.

Мы отсчитываем углы от положительного направления оси OX против часовой стрелки. Полный круг — 360 градусов.

Точка с координатами $(1; 0)$ соответствует углу в 0 градусов. Точка с координатами $(-1; 0)$ отвечает углу в $180°$, точка с координатами $(0; 1)$ — углу в $90°$. Каждому углу от нуля до 360 градусов соответствует точка на единичной окружности.

Косинусом угла α называется абсцисса (то есть координата по оси OX) точки на единичной окружности, соответствующей данному углу α.

Синусом угла α называется ордината (то есть координата по оси OY) точки на единичной окружности, соответствующей данному углу α.

Например:

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 0^\circ = 1, \quad \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Всё это легко увидеть на нашем рисунке.

Итак, косинус и синус — координаты точки на единичной окружности, соответствующей данному углу. Косинус — абсцисса (x), синус — ордината (y). Поскольку окружность единичная, для любого угла и синус, и косинус находятся в пределах от -1 до 1:

$$-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1,$$
$$-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1.$$

Простым следствием теоремы Пифагора является *основное тригонометрическое тождество*:

$$\boxed{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1}$$

Для того, чтобы узнать знаки синуса и косинуса какого-либо угла, не нужно рисовать отдельных таблиц. Всё уже нарисовано! Находим на нашей окружности точку, соответствующую данному углу α, смотрим, положительны или отрицательны ее координаты по x (это косинус угла α) и по y (это синус угла α).

Принято использовать две единицы измерения углов: градусы и радианы. Перевести градусы в радианы просто: 360 градусов, то есть полный круг, соответствует 2π радиан. На нашем рисунке подписаны и градусы, и радианы.

Если отсчитывать угол от нуля против часовой стрелки — он положительный. Если отсчитывать по часовой стрелке — угол будет отрицательным. Например, угол $-30°$ — это угол величиной в $30°$, который отложили от положительного направления оси x по часовой стрелке. Легко заметить, что

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$$

Углы могут быть и больше 360 градусов. Например, угол $732°$ — это два полных оборота по часовой стрелке и еще $12°$. Поскольку, сделав несколько полных оборотов по окружности, мы возвращаемся в ту же точку с теми же координатами по x и по y, значения синуса и косинуса повторяются через 360°. То есть:

$$\cos(\alpha + 360^\circ \cdot n) = \cos\alpha,$$
$$\sin(\alpha + 360^\circ \cdot n) = \sin\alpha,$$

где n — целое число. То же самое можно записать в радианах:

$$\cos(\alpha + 2\pi n) = \cos\alpha,$$
$$\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin\alpha.$$

Можно на том же рисунке изобразить ещё и оси тангенсов и котангенсов, но проще посчитать их значения. Ведь

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

В результате получим следующую таблицу.

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\operatorname{tg}\varphi$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не существует	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{ctg}\varphi$	не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	не существует