

Тригонометрические функции

В школьной программе изучаются четыре тригонометрических функции — синус, косинус, тангенс и котангенс. В этой статье мы рассмотрим графики и основные свойства этих функций.

1. Начнем с построения графика функции $y = \sin x$.

Выберем подходящий масштаб. По оси X : три клетки примем за $\frac{\pi}{2}$ (это примерно полтора). Тогда $\frac{\pi}{6}$ — одна клеточка, $\frac{\pi}{3}$ — две клетки.

По оси Y : две клетки примем за единицу.

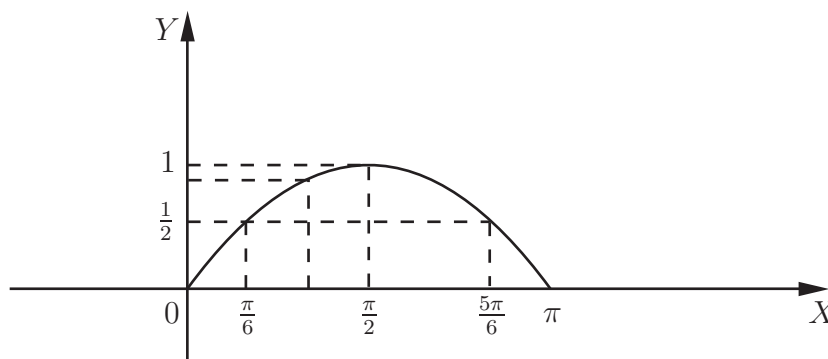
Область определения функции $y = \sin x$ — все действительные числа, поскольку значение $\sin \alpha$ можно посчитать для любого угла α .

Вспомним, что у нас есть [тригонометрический круг](#), на котором обозначены синусы и косинусы основных углов. Удобнее всего отметить на будущем графике точки, в которых значение синуса является рациональным числом.

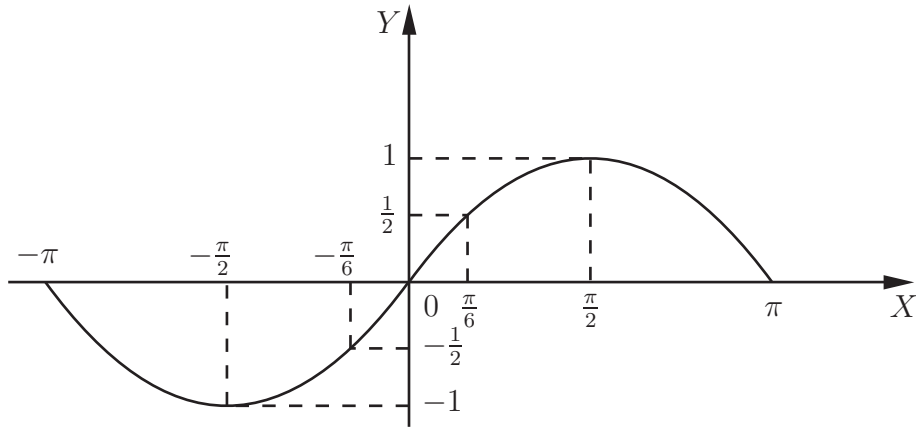
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0

Можем добавить, для большей плавности графика, точки $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3}$. В них значение синуса равно $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,86$.

Соединим полученные точки плавной кривой.



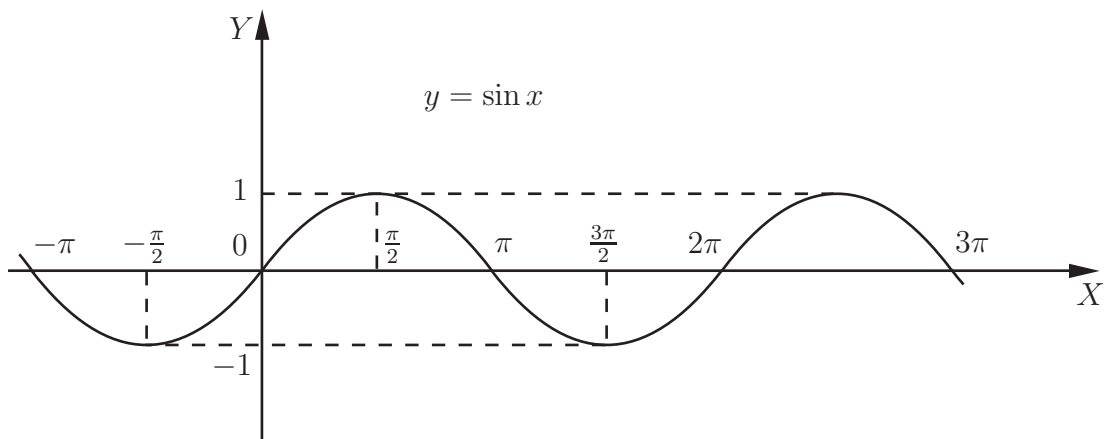
Мы помним, что $\sin(-x) = -\sin x$. Это значит, что $\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$; $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$. Получается часть графика, симметричная той, которую нарисовали раньше.



Кроме того, значения синуса повторяются через полный круг или через целое число кругов, то есть

$$\sin(x + 2\pi n) = \sin x.$$

Это значит, что функция $y = \sin x$ является периодической. Мы уже построили участок графика длиной 2π . А теперь мы как будто «копируем» этот участок и повторяем его с периодом 2π :



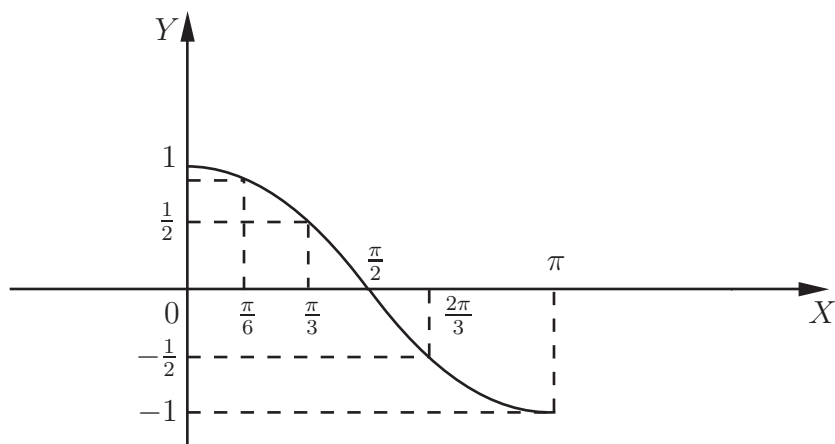
Синусоида построена.

Перечислим основные свойства функции $y = \sin x$.

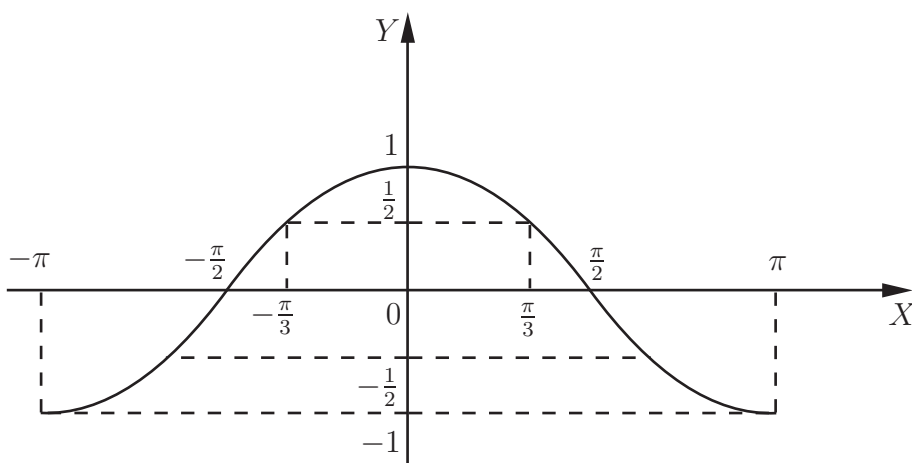
- 1) $D(y)$: $x \in R$, то есть область определения — все действительные числа.
- 2) $E(y)$: $y \in [-1; 1]$. Это означает, что наибольшее значение функции $y = \sin x$ равно единице, а наименьшее — минус единице.
- 3) Функция $y = \sin x$ — нечетная. Ее график симметричен относительно нуля.
- 4) Функция $y = \sin x$ — периодическая. Ее наименьший положительный период равен 2π .

2. Следующий график: $y = \cos x$. Масштаб — тот же. Отметим на графике точки, в которых косинус является рациональным числом:

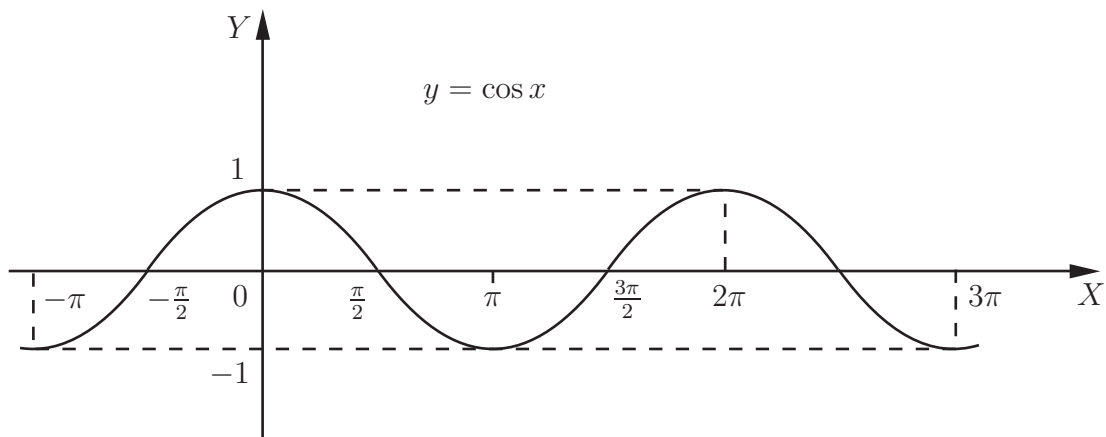
x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1



Поскольку $\cos(-x) = \cos x$, график будет симметричен относительно оси Y , то есть левая его часть будет зеркальным отражением правой.



Функция $y = \cos x$ — тоже периодическая. Так же, как и для синуса, ее значения повторяются через $2\pi n$. «Копируем» участок графика, который уже построили, и повторяем периодически.



Перечислим основные свойства функции $y = \cos x$.

- 1) $D(y)$: $x \in R$, то есть область определения — все действительные числа.
- 2) $E(y)$: $y \in [-1; 1]$. Это означает, что наибольшее значение функции $y = \cos x$ равно единице, а наименьшее — минус единице.
- 3) Функция $y = \cos x$ — четная. Ее график симметричен относительно оси Y .
- 4) Функция $y = \cos x$ — периодическая. Ее наименьший положительный период равен 2π .

Отметим еще одно свойство. Графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ весьма похожи друг на друга. Можно даже сказать, что график косинуса получится, если график синуса сдвинуть на $\frac{\pi}{2}$ влево. Так оно и есть — по одной из формул приведения, $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$.

Форма графиков функций синус и косинус, которые мы построили, очень характерна и хорошо знакома нам. Такой линией дети рисуют волны. Да, это и есть волны!

Функции синус и косинус идеально подходят для описания колебаний и волн — то есть процессов, повторяющихся во времени.

По закону синуса (или косинуса) происходят колебания маятника или груза на пружине. Переменный ток (тот, который в розетке) выражается формулой $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \alpha)$. Но и это не все. Функции синус и косинус описывают звуковые, инфракрасные и ультразвуковые волны, а также весь спектр электромагнитных колебаний. Ведь то, что наш глаз воспринимает как свет и цвет, на самом деле представляет собой электромагнитные колебания. Разные длины волн света воспринимаются нами как разные цвета. Наши глаза видят лишь небольшую часть спектра электромагнитных волн. Кроме видимого цвета, в нем присутствуют радиоволны, тепловое (инфракрасное) излучение, ультрафиолетовое, рентгеновское и гамма-излучение. Более того — объекты микромира (например, электрон) проявляют волновые свойства.

3. Перейдем к графику функции $y = \operatorname{tg} x$.

Чтобы построить его, воспользуемся таблицей значений тангенса. Масштаб возьмем тот же — три клетки по оси X соответствуют $\frac{\pi}{2}$, две клетки по Y — единице. График будем строить на отрезке от 0 до π . Поскольку $\operatorname{tg}(x + \pi n) = \operatorname{tg} x$, функция тангенс также является периодической. Мы нарисуем участок длиной π , а затем периодически его повторим.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\operatorname{tg} x$	0	1	$\sqrt{3} \approx 1,7$	не суц.	$-\sqrt{3} \approx -1,7$	-1	0

Непонятно только, как быть с точкой $x = \frac{\pi}{2}$. Ведь в этой точке значение тангенса не определено. А как же будет вести себя график функции $y = \operatorname{tg} x$ при x , близких к $\frac{\pi}{2}$, то есть к 90 градусам?

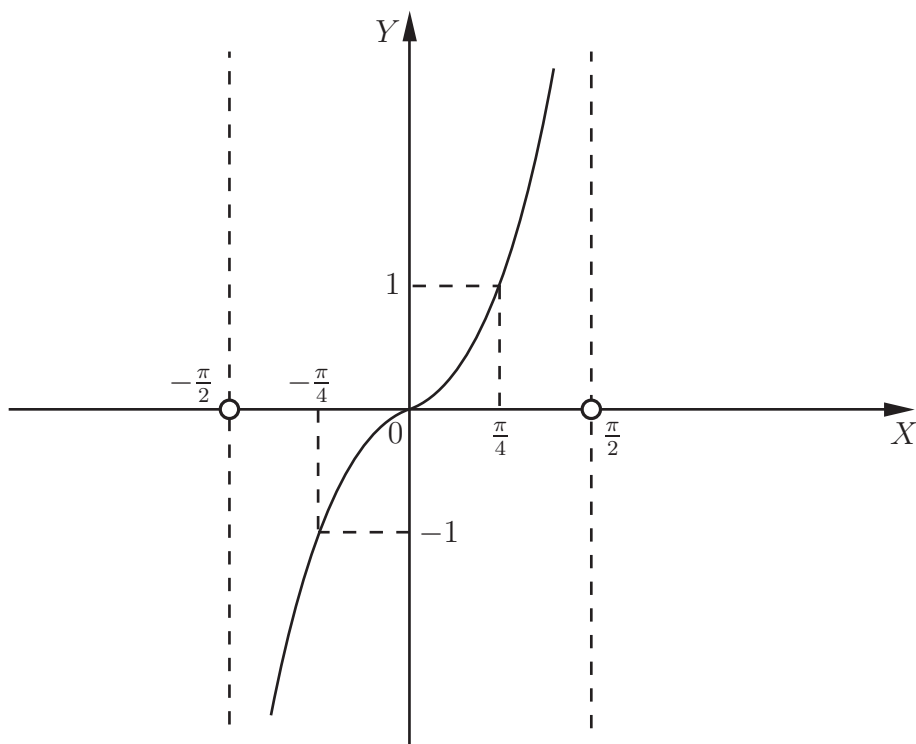
Чтобы ответить на этот вопрос, возьмем значение x , близкое к 90° , и посчитаем на калькуляторе значения синуса и косинуса этого угла. Пусть $x = 89^\circ$.

Синус угла 89° — это почти 1. Точнее, $\sin 89^\circ = 0,9998$.

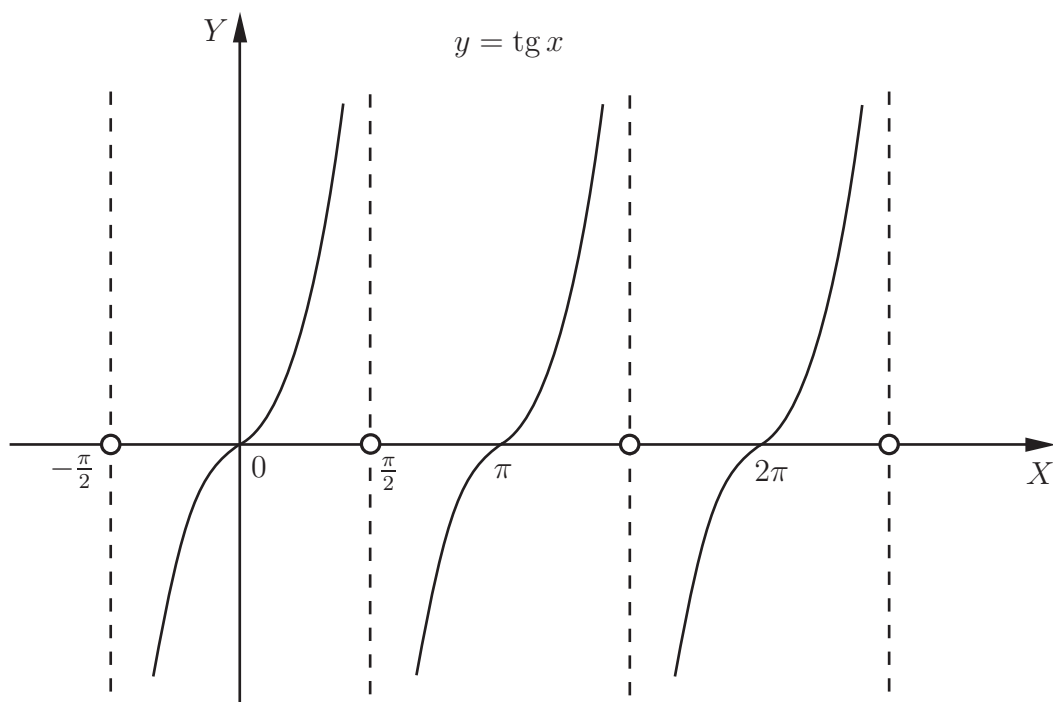
Косинус этого угла близок к нулю. Точнее, $\cos 89^\circ = 0,0175$.

Тогда $\operatorname{tg} 89^\circ = \frac{\sin 89^\circ}{\cos 89^\circ} = \frac{0,9998}{0,0175} = \frac{9998}{175} \approx 59$. Итак, при $x = 89^\circ$ график уйдет на 59 единиц (то есть на 118 клеток) вверх. Можно сказать, что если x стремится к 90° (то есть к $\frac{\pi}{2}$, значение функции $y = \operatorname{tg} x$ **стремится к бесконечности**.

Аналогично, при x , близких к $-\frac{\pi}{2}$, график тангенса уходит вниз, то есть **стремится к минус бесконечности**.



Осталось только «скопировать» этот участок графика и повторить его с периодом π .



Перечислим свойства функции $y = \operatorname{tg} x$.

1) $D(y): x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$.

Другими словами, тангенс не определен для $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

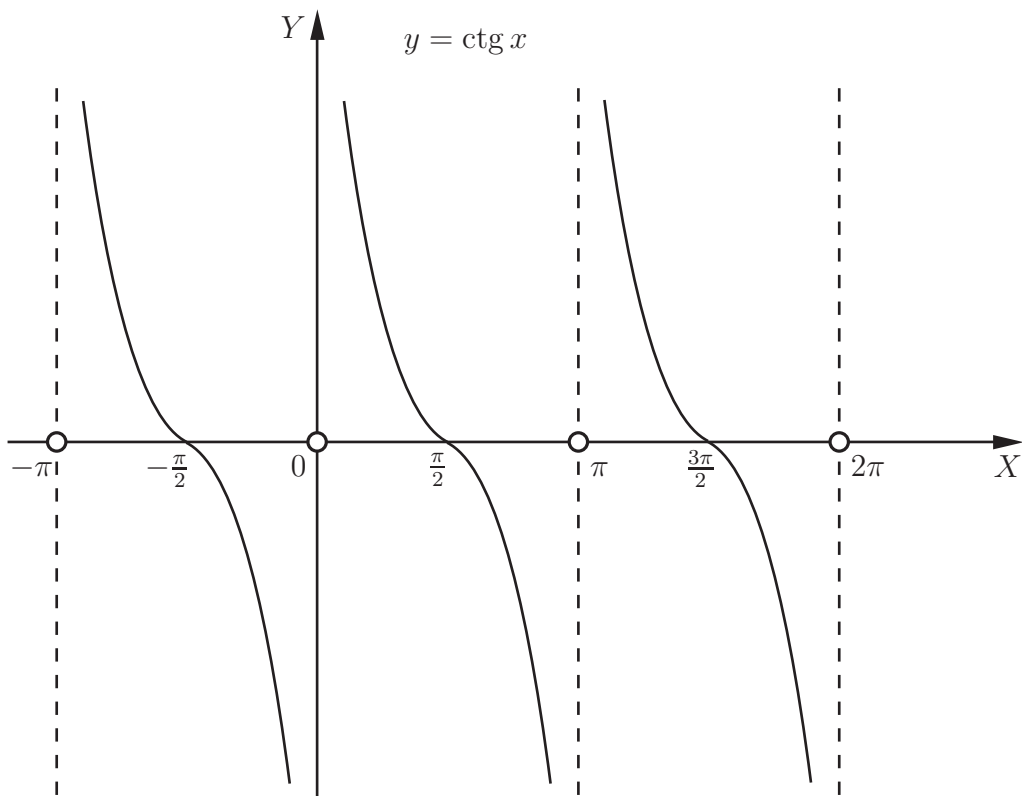
2) Область значений $E(y)$ — все действительные числа.

3) Функция $y = \operatorname{tg} x$ — нечетная. Ее график симметричен относительно начала координат.

4) Функция $y = \operatorname{tg} x$ — периодическая. Ее наименьший положительный период равен π .

5) Функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, то есть на каждом участке, на котором она непрерывна.

4. График функции $y = \operatorname{ctg} x$ строится аналогично. Вот он:



- 1) $D(y): x \in (\pi n; \pi n + \pi)$. Другими словами, котангенс не определен для $x = \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.
- 2) Область значений $E(y)$ — все действительные числа.
- 3) Функция $y = \text{ctg } x$ — нечетная. Ее график симметричен относительно начала координат.
- 4) Функция $y = \text{ctg } x$ — периодическая. Ее наименьший положительный период равен π .
- 5) Функция $y = \text{ctg } x$ убывает при $x \in (\pi n; \pi n + \pi)$, то есть на каждом участке, на котором она непрерывна.