Задача C6 на ЕГЭ по математике

Содержание

Известно, что на ЕГЭ по математике многие школьники не приступают к задаче C6 и даже не читают её (а зачем? — всё равно, мол, не решу). И очень напрасно!

Как правило, задача C6 состоит из двух или трёх пунктов, среди которых есть совсем несложные. За всю задачу даётся 4 первичных балла, по 1-2 балла за каждый пункт. Поэтому, сделав хотя бы часть задачи (скажем, просто предъявив нужный пример в одном из пунктов), можно получить себе в копилку дополнительные первичные баллы. А они дадут прирост итогового результата по стобалльной шкале!

Для решения задачи C6 необходим минимальный запас знаний. Это арифметика 6-го класса (всё, что связано с делимостью) и сведения по прогрессиям из алгебры 9-го класса. Больше ничего.

Почему же задача C6 считается (и, в общем-то, является) самой сложной на ЕГЭ по математике? Она нестандартна. Она требует так называемой математической культуры — умения грамотно строить рассуждения. А умение это у подавляющего большинства школьников отсутствует начисто — ведь в школе, к сожалению, до развития математической культуры дело обычно не доходит.

Учиться культурно рассуждать можно и обязательно нужно. Задача C6 предоставляет для этого отличную возможность. Получаться начнёт далеко не сразу, так что готовиться к C6 следует начинать задолго до ЕГЭ. Рецепт тут один: решать, решать и решать.

Данное пособие написано с целью помочь школьникам научиться решать нестандартные задачи типа C6. Оно содержит весь нужный теоретический материал и задачи, большая часть которых предлагалась на ЕГЭ и диагностических работах МИОО за последнее время.

Ко всем задачам приведены решения. При этом не ставилась цель сделать решение лаконичным и максимально совершенным технически (в ущерб изложению идей). Ведь учиться математике означает усваивать идеи; на прояснение идей, лежащих в основе решения каждой задачи, и сделан основной упор.

1 Необходимая теория

1.1 Числовые множества

В данном разделе мы определим числовые множества, необходимые для задачи C6. Введённую терминологию нужно твёрдо знать!

Натуральные числа — это числа $1, 2, 3, \ldots$ Натуральные числа мы используем для счёта, а счёт начинается с единицы. Поэтому — внимание: ноль не является натуральным числом! (Ведь нам вряд ли придёт в голову сказать: «На столе стоит ноль чашек».)

Множество натуральных чисел обозначается $\mathbb{N}$.

Целые числа — это числа $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ Таким образом, целые числа — это ноль и «плюс-минус натуральные». Натуральные числа являются целыми положительными числами.

Множество целых чисел обозначается $\mathbb{Z}$. (Именно это обозначение мы постоянно используем в тригонометрических уравнениях для записи ответов.)

Рациональные числа — это всевозможные дроби m/n с целыми m и n (при этом, конечно, $n \neq 0$; чтобы избежать данной оговорки, говорят также, что m — целое, а n — натуральное).

Любое целое число является в то же время рациональным (например, $3 = 6/2$). Однако число $1/2$ не является целым.

Множество рациональных чисел обозначается $\mathbb{Q}$.

1.2 Делимость

Понятие делимости относится к целым числам (в частности, к натуральным). Начиная с этого момента *все числа считаются целыми*. Если в каком-то случае это окажется не так, мы сделаем специальную оговорку.

Целые числа мы обозначаем $a, b, c, \ldots, k, l, m, n, \ldots, x, y, z$, то есть используем все строчные буквы латинского алфавита.

Вы прекрасно знаете, что число 12 делится на 4, но не делится на 5. Каково формальное определение делимости? Вот оно.

Определение. Число a делится на число $b \neq 0$, если найдётся число c такое, что $a = bc$.

Если a делится на b, то число b называется *делителем* числа a. Например, число 12 имеет шесть делителей: это 1, 2, 3, 4, 6 и 12.

Упражнение. Докажите, что если числа a и b делятся на c, то $a + b$ тоже делится на c.

Сформулируем наиболее важные признаки делимости.

- a делится на 2 $\Leftrightarrow$ последняя цифра a есть 0, 2, 4, 6 или 8;
- a делится на 5 $\Leftrightarrow$ последняя цифра a есть 0 или 5;
- a делится на 10 $\Leftrightarrow$ последняя цифра a равна 0;
- a делится на 3 $\Leftrightarrow$ сумма цифр a делится на 3;
- a делится на 9 $\Leftrightarrow$ сумма цифр a делится на 9.

1.3 Чётность

Соображения, связанные с чётностью или нечётностью, часто фигурируют в задачах C6. Поэтому необходимые факты имеет смысл отметить особо.

Определение. Число называется *чётным*, если оно делится на 2. Число называется *нечётным*, если оно не делится на 2.

Вот все чётные числа: $0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots$ Если a чётно, то оно имеет вид $a = 2n$. А вот все нечётные числа: $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$ Ясно, что если a нечётно, то оно имеет вид $a = 2n + 1$.

Следующие утверждения весьма очевидны, и вы можете использовать их при решении задачи C6 (никто от вас не потребует их доказательства). Но вы можете доказать их в качестве упражнения.

- Сумма любого числа чётных слагаемых чётна.
- Сумма чётного числа нечётных слагаемых чётна. Сумма нечётного числа нечётных слагаемых нечётна.
- Пусть имеется произведение нескольких множителей. Если все множители нечётны, то произведение нечётно. Если хотя бы один множитель чётный, то произведение чётно.

1.4 Деление с остатком

Число 13 не делится на 5. Наибольшее число, которое делится на 5 и не превосходит 13, равно $10 = 5 \cdot 2$. Таким образом, $13 = 5 \cdot 2 + 3$, и мы скажем, что в результате деления 13 на 5 получается частное 2 и остаток 3.

Оказывается, любое число a можно разделить с остатком на любое число $b \neq 0$. А именно, найдутся два числа q и r такие, что $a = bq + r$, и при этом будет выполнено неравенство $0 \leqslant r < |b|$. Число q назвается *частным*, а число r — *остатком* от деления a на b.

Если $r = 0$, то есть $a = bq$, то a делится на b.

Упражнение. Найдите частное и остаток от деления: а) 7 на 2; б) 15 на 4; в) 2012 на 5; г) 1001 на 13; д) 9 на 8; е) 8 на 9.

Остаток от деления любого нечётного числа на 2 равен единице. Вот почему всякое нечётное число может быть записано в виде $2n + 1$.

Остатки оказываются полезными во многих ситуациях. Допустим, в ходе решения задачи вам нужно доказать, что равенство $n^2 = 3k + 2$ не может выполняться ни при каких целых числах n и k. Рассуждаем следующим образом.

Число n при делении на 3 может давать остатки 0, 1 или 2. Иными словами, возможны три случая: $n = 3m$, $n = 3m + 1$ или $n = 3m + 2$. Какие остатки при делении на 3 будут у числа n^2? Давайте посмотрим, что получается в каждом из трёх случаев.

$$
\begin{aligned}
&(3m)^2 = 9m^2 \quad \text{(остаток 0);}\\
&(3m+1)^2 = 9m^2 + 6m + 1 \quad \text{(остаток 1);}\\
&(3m+2)^2 = 9m^2 + 12m + 4 = (9m^2 + 12m + 3) + 1 \quad \text{(остаток 1).}
\end{aligned}
$$

Таким образом, *квадрат целого числа при делении на* 3 *не может давать остаток* 2. Следовательно, равенство $n^2 = 3k + 2$ действительно невозможно ни при каких n и k.

Упражнение. Докажите, что число $100\ldots004$ (между 1 и 4 стоит любое число нулей) не является квадратом целого числа.

Упражнение. Докажите, что квадрат целого числа при делении на 4 может давать только два остатка: 0 и 1.

Упражнение. Докажите, что $n^3 + 2n$ делится на 3.

1.5 Каноническое разложение

Всякое число делится на 1 и на само себя. Если натуральное число p не равно 1 и не имеет других натуральных делителей, кроме 1 и p, то такое число p называется *простым.*

Вот первые несколько простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Число 2 — единственное чётное простое число.

Число, не равное 1 и не являющееся простым, называется *составным.* Например, 15 — составное число (оно делится на 3). Число 1036 — тоже составное (оно чётное). Единица не является ни простым числом, ни составным.

Упражнение. Число $3^{15} - 1$ является составным. Почему?

Оказывается, всякое число можно разложить на простые множители. Например:

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5;$$
$$504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7.$$

Такое разложение единственно с точностью до порядка множителей и называется *каноническим разложением.* Утверждение о существовании и единственности канонического разложения носит название *основной теоремы арифметики.*

Каноническое разложение даёт полную картину делителей данного числа (и, в частности, позволяет найти их количество). Именно, пусть $a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_s^{n_s}$ — каноническое разложение числа a. Тогда каноническое разложение любого делителя числа a состоит из простых множителей, входящих в набор $\{p_1, p_2, \ldots, p_s\}$, показатели степени которых не превосходят соответственно чисел $n_1, n_2, \ldots, n_s$. Например, любой делитель числа $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ имеет вид $2^a \cdot 3^b \cdot 7^c$, где $a \in \{0, 1, 2, 3\}$, $b \in \{0, 1, 2\}$ и $c \in \{0, 1\}$.

Упражнение. Пусть p — простое число. Сколько делителей у числа: а) p^2; б) p^3; в) p^n?

Упражнение. Пусть p и q — простые числа. Сколько делителей у числа: а) pq; б) p^2q^3; в) p^mq^n?

Упражнение. Обобщив рассуждения пункта в) предыдущего упражнения, покажите, что количество делителей числа $a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_s^{n_s}$ равно $(n_1 + 1)(n_2 + 1) \ldots (n_s + 1)$. Найдите, сколько делителей имеет число 504.

Упражнение. Найдите канонические разложения чисел 540 и 252. С помощью полученных разложений найдите НОД $(540, 252)$ — наибольший общий делитель этих чисел.

1.6 Взаимно простые числа

Числа называются *взаимно простыми*, если они не имеют общих делителей кроме 1. Иными словами, числа a и b взаимно просты, если НОД $(a, b) = 1$. Можно сказать и так: числа a и b взаимно просты тогда и только тогда, когда дробь a/b несократима.

Например, числа 8 и 15 взаимно просты. Числа 9 и 15 не являются взаимно простыми — у них имеется общий делитель 3.

Числа взаимно просты тогда и только тогда, когда их канонические разложения состоят из непересекающихся наборов простых чисел. Например, числа $2^3 \cdot 5 \cdot 13^2$ и $3^2 \cdot 7^3 \cdot 11$ являются взаимно простыми.

Свойства взаимно простых чисел. Пусть числа a и b взаимно просты. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если некоторое число делится на a и b, то оно делится и на их произведение ab.

2. Если an делится на b, то n делится на b.

(Вы легко поймёте, почему так получается, если представите себе «непересекающиеся» канонические разложения чисел a и b и вдобавок вспомните, что каноническое разложение делителя служит «частью» канонического разложение делимого числа.)

Согласно утверждению 1, например, если некоторое число делится на 8 и на 15, то оно делится на $8 \cdot 15 = 120$. То, что числа взаимно просты, — важное условие. Так, 12 делится на 4 и на 6, но не делится на $4 \cdot 6 = 24$.

Упражнение. Какие цифры можно вставить вместо звёздочек в записи $35{*}4{*}$, чтобы полученное пятизначное число делилось на 45?

Утверждение 2 обычно работает в ситуациях типа следующей. Пусть, например, $5n = 9m$. Так как $5n$ делится на 9 и числа 5 и 9 взаимно просты, то n делится на 9. По той же самой причине m делится на 5.

1.7 Последовательности

Что такое последовательность? Представьте себе устройство, которое с некоторыми интервалами выдаёт одно число за другим. Например: 2, −3, 15, 28, −6, 0, 3, ... Набор чисел на выходе этого устройства и будет последовательностью.

Более строго, *последовательность чисел*, или *числовая последовательность* — это набор чисел, в котором каждому числу можно присвоить некоторый номер, причём каждому номеру отвечает единственное число данного набора. Номер — это натуральное число; нумерация начинается с единицы.

Так, в приведённой выше последовательности первый номер имеет число 2 (это первый член последовательности), а номер пять — число −6 (это пятый член последовательности).

Число с номером n (то есть *n-й член* последовательности) обозначается a_n (или b_n, c_n, ...).

Весьма удобно, когда n-й член последовательности можно задать некоторой формулой. Например, формула $a_n = 2n - 3$ задаёт последовательность: $-1, 1, 3, 5, 7, \ldots$ Формула $a_n = (-1)^n$ задаёт последовательность: $-1, 1, -1, 1, \ldots$

Упражнение. Придумайте формулу n-го члена для следующих последовательностей:

а) $1, 3, 5, 7, \ldots$; б) $5, 8, 11, 14, \ldots$; в) $1, 4, 9, 16, \ldots$; г) $1, -2, 3, -4, \ldots$

Все рассмотренные нами последовательности являются *бесконечными*, то есть содержащими бесконечное множество чисел. Но бывают и *конечные* последовательности. Собственно, любой конечный набор чисел является конечной последовательностью. Например, конечная последовательность $1, 2, 3, 4, 5$ состоит из пяти чисел.

В задаче C6 нужны два специальных вида последовательностей: арифметическая и геометрическая прогрессии.

1.8 Арифметическая прогрессия

Арифметическая прогрессия — это последовательность, каждый член которой (начиная со второго) равен сумме предыдущего члена и некоторого фиксированного числа:

$$a_{n+1} = a_n + d \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Фиксированное число d называется *разностью* арифметической прогрессии.

Например, последовательность $2, 5, 8, 11, \ldots$ является арифметической прогрессией с первым членом 2 и разностью 3.

Нетрудно получить формулу n-го члена арифметической прогрессии. Пишем:

$$
\begin{aligned}
&a_2 = a_1 + d,\\
&a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,\\
&a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d,
\end{aligned}
$$

и становится ясно, что формула для a_n имеет вид:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Упражнение. Сколько имеется трёхзначных чисел, делящихся на 13?

Нужно знать формулу суммы $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ первых n членов арифметической прогрессии. Она имеет вид:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}\,.$$

Полезная модификация этой формулы получается, если в неё подставить формулу n-го члена:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Свойство арифметической прогрессии. Если числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию, то $2b = a + c$.

Упражнение. Докажите это свойство.

1.9 Геометрическая прогрессия

Геометрическая прогрессия — это последовательность, каждый член которой (начиная со второго) равен произведению предыдущего члена и некоторого фиксированного числа:

$$b_{n+1} = b_n q \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Фиксированное число q называется *знаменателем* геометрической прогрессии.

Например, последовательность $2, 6, 18, 54, \ldots$ является геометрической прогрессией с первым членом 2 и знаменателем 3.

Получим формулу n-го члена геометрической прогрессии. Пишем:

$$
\begin{aligned}
&b_2 = b_1 q,\\
&b_3 = b_2 q = (b_1 q)q = b_1 q^2,\\
&b_4 = b_3 q = (b_1 q^2)q = b_1 q^3,
\end{aligned}
$$

и в результате имеем:

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Для суммы $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ первых n членов геометрической прогрессии нужно знать следующую формулу:

$$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}\,.$$

Свойство геометрической прогрессии. Пусть числа a, b, c образуют геометрическую прогрессию. Тогда $b^2 = ac$.

Упражнение. Докажите это свойство.

Важное замечание: в конечной геометрической прогрессии, состоящей из целых чисел, знаменатель q может не быть целым числом! Вот пример: числа 4, 6, 9 образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 3/2.

Упражнение. Между числами 27 и 64 вставьте два числа так, чтобы получилась геометрическая прогрессия.

Иметь дело с рациональным знаменателем не очень удобно. К счастью, это и не нужно. Дело в том, что для *конечной* геометрической прогрессии, состоящей из *целых* чисел, существует несколько иное представление, хорошо приспособленное именно для задач С6.

Представление конечной целочисленной геометрической прогрессии.

- Геометрическая прогрессия из трёх целых чисел имеет вид ka^2, kab, kb^2 (k, a, b — целые).
- Геометрическая прогрессия из четырёх целых чисел имеет вид ka^3, ka^2b, kab^2, kb^3.
- Геометрическая прогрессия из пяти целых чисел имеет вид ka^4, ka^3b, ka^2b^2, kab^3, kb^4.

Вообще, пусть $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — целые числа, образующие геометрическую прогрессию. Тогда найдутся целые числа k, a, b такие, что $c_1 = ka^{n-1}$, $c_2 = ka^{n-2}b$, $c_3 = ka^{n-3}b^2$, $\ldots$, $c_n = kb^{n-1}$.

Доказательство. Докажем общий случай. Пусть знаменатель прогрессии $c_1, c_2, \ldots, c_n$ равен q. Очевидно, q — число рациональное (иначе прогрессия не была бы целочисленной). Запишем q в виде несократимой дроби: $q = b/a$. Имеем:

$$c_2 = c_1\frac{b}{a}, \quad c_3 = c_1\frac{b^2}{a^2}, \quad \ldots, \quad c_n = c_1\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}.$$

Поскольку a и b взаимно просты и c_n — целое, число c_1 должно делиться на a^{n-1}. Иными словами, найдётся целое k такое, что $c_1 = ka^{n-1}$. Далее последовательно получаем:

$$\begin{aligned} c_2 &= ka^{n-1}\frac{b}{a} = ka^{n-2}b, \\ c_3 &= ka^{n-1}\frac{b^2}{a^2} = ka^{n-3}b^2, \\ &\ldots \\ c_n &= ka^{n-1}\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}} = kb^{n-1}, \end{aligned}$$

что и требовалось.

1.10 Метод «оценка плюс пример»

«Оценка плюс пример» — это специальное математическое рассуждение, которое применяется в некоторых задачах при нахождении наибольших или наименьших значений.

Суть метода состоит в следующем. Предположим, что мы ищем наименьшее значение некоторой величины A. Действуем в два этапа.

1. *Оценка.* Показываем, что выполнено неравенство $A \geqslant \alpha$.
2. *Пример.* Предъявляем пример, когда достигается равенство $A = \alpha$.

Тем самым доказано, что наименьшее значение A равно α.

Мы проиллюстрируем данный метод на трёх задачах, расположенных по возрастанию сложности.

1. Найти наименьшее значение функции $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

Решение. Выделим полный квадрат:

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1) + 2 = (x - 1)^2 + 2.$$

Поскольку квадрат неотрицателен, получаем оценку: $f(x) \geqslant 2$. Приводим пример, когда равенство достигается: $f(1) = 2$. Следовательно, искомое наименьшее значение равно 2.

2. Натуральные числа от 1 до 10 разбили на две группы так, что произведение чисел в первой группе делится на произведение чисел во второй группе. Какое наименьшее значение может принимать частное от деления первого произведения на второе?

Решение. Число 7 должно быть в первой группе, поскольку оно простое и никакое другое число на него не делится. Следовательно, частное не меньше 7 (оценка).

Приведём пример разбиения, при котором частное равно 7. Первая группа: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; вторая группа: 8, 9, 10. В таком случае

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{8 \cdot 9 \cdot 10} = 7.$$

Следовательно, наименьшее значение частного равно 7.

Хорошо, но откуда взялся пример? Возникает ощущение, что он с неба свалился. В общем-то, для читающего вашу работу так оно и должно быть. Запомните: *при записи решения вы не обязаны объяснять, каким образом вы додумались до примера.* Просто предъявляете пример, и всё! Угадали вы его, почувствовали или получили свой пример логическим путём — это абсолютно никого не касается.

Мы, тем не менее, будем по возможности озвучивать те мысли, которые позволяют нужный пример сконструировать. Оформляться это будет следующим образом.

► В данном случае нам захотелось разбить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 на две группы с равными произведениями. Для этого находим каноническое разложение произведения всех этих чисел:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2.$$

Как видим, оно является квадратом числа $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$. Остаётся лишь найти числа, произведение которых равно 720. Это, например, 8, 9, и 10. ◄

3. Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 13 раз больше, либо в 13 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 6075.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?

б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?

в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Решение.

а) Предположим, что в последовательности два члена. Тогда она имеет вид: a, $13a$ (или наоборот: $13a$, a). Согласно условию получаем: $14a = 6075$. Это невозможно, так как слева стоит чётное число, а справа — нечётное. Следовательно, последовательность не может состоять из двух членов.

б) Да, может. Пример: 405, 5265, 405.

► Данный пример строится легко. Ищем последовательность вида a, $13a$, a. Получаем: $15a = 6075$, откуда находим $a = 405$. ◄

в) Прежде чем записывать решение, начнём с некоторых неформальных соображений.

► Ясно, что чисел в последовательности будет тем больше, чем меньше сами числа. Поэтому надо по максимуму использовать 1 и 13, чередуя их.

Попробуем так и начать: 1, 13, 1, 13, … Последовательность состоит из идущих друг за другом пар $(1, 13)$; сумма в каждой паре равна 14. Какое число будет последним? Очевидно, 13 в конце оказаться не может — тогда сумма всех членов последовательности будет делиться на 14, а 6075 — число нечётное. Остаётся проверить единицу. Делим 6075 на 14 с остатком и получаем: $6075 = 14 \cdot 433 + 13$. Значит, и единицы в конце быть не может.

Наша попытка потерпела неудачу, но результат деления с остатком подсказывает, что нужно сделать. Изменим чередование: 13, 1, 13, 1, … Тогда после 433 пар $(13, 1)$ мы сможем завершить последовательность числом 13. Таким образом, нам удалось обойтись только числами 1 и 13, и возникает ощущение, что это и есть наиболее длинная последовательность.

Вот теперь переходим к записи решения. ◄

Заметим, что в последовательности может оказаться 867 членов. Пример:

$$\underbrace{13, 1, 13, 1, \ldots, 13, 1}_{\text{433 пары}}, 13.$$

Действительно, $433 \cdot (13 + 1) + 13 = 6075$.

Покажем, что большего числа членов быть не может. Предположим обратное: наша последовательность a_1, a_2, a_3, a_4, … содержит не менее 868 членов. Разобьём их последовательно на пары: $(a_1, a_2), (a_3, a_4)$, … Сумма чисел в каждой паре как минимум 14, а самих пар не менее 434. Сумма всех членов получится тогда не менее $14 \cdot 434 = 6076$, что противоречит условию.

Значит, в последовательности может быть самое большее 867 членов.

2 Задачи

Задача 1 (ЕГЭ-2010)

Перед каждым из чисел 6, 7, ..., 11 и 9, 10, ..., 17 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю сумму и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

[Ответ] [Решение]

Задача 2 (ЕГЭ-2011)

На доске написано более 42, но менее 54 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -7, среднее арифметическое всех положительных из них равно 6, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -12.

а) Сколько чисел написано на доске?
б) Каких чисел больше: положительных или отрицательных?
в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

[Ответ] [Решение]

Задача 3 (ЕГЭ-2011)

Набор состоит из 33 натуральных чисел, среди которых есть числа 3, 4 и 5. Среднее арифметическое любых 27 чисел этого набора меньше 2.

а) Может ли такой набор содержать ровно 13 единиц?
б) Может ли такой набор содержать менее 13 единиц?
в) Докажите, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 28.

[Ответ] [Решение]

Задача 4 (ЕГЭ-2011)

Бесконечная арифметическая прогрессия, состоящая из различных натуральных чисел, первый член которой меньше 10, не содержит ни одного числа вида $n(n+1)/2$, $n \in \mathbb{N}$. Какое наименьшее значение может принимать сумма первых 10 членов этой прогрессии?

[Ответ] [Решение]

Задача 5 (МИОО, диагностическая работа №1, сентябрь 2011)

Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1512 и

а) пять;
б) четыре;
в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

[Ответ] [Решение]

Задача 6 (МИОО, диагностическая работа №2, декабрь 2011)

Все члены геометрической прогрессии — различные натуральные числа, заключённые между числами 210 и 350.

а) Может ли такая прогрессия состоять из четырёх членов?

б) Может ли такая прогрессия состоять из пяти членов?

[Ответ] [Решение]

Задача 7 (МИОО, диагностическая работа №3, март 2012)

В возрастающей последовательности натуральных чисел каждые три последовательных члена образуют либо арифметическую, либо геометрическую прогрессию. Первый член последовательности равен 1, а последний 2046.

а) Может ли в последовательности быть три члена?

б) Может ли в последовательности быть четыре члена?

в) Может ли в последовательности быть меньше 2046 членов?

[Ответ] [Решение]

Задача 8 (Репетиционный ЕГЭ, Москва, март 2012)

Дана последовательность натуральных чисел, причём каждый следующий член отличается от предыдущего либо на 10, либо в 7 раз. Сумма всех членов последовательности равна 163.

а) Какое наименьшее число членов может быть в этой последовательности?

б) Какое наибольшее число членов может быть в этой последовательности?

[Ответ] [Решение]

Задача 9 (Досрочный ЕГЭ, апрель 2012)

Каждое из чисел $1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9, 10, -11$ по одному записывают на 10 карточках. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел $1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9, 10, -11$. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные 10 сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

[Ответ] [Решение]

Задача 10 (ЕГЭ-2012)

Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $3/11$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $3/7$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 10 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов *а* и *б*?

[Ответ] [Решение]

Задача 11 (ЕГЭ-2012)

Имеется 33 коробки массой 19 кг каждая и 27 коробок массой 49 кг каждая. Все эти коробки раскладываются по двум контейнерам. Пусть S — модуль разности суммарных масс коробок в контейнерах. Найдите наименьшее значение S:

а) если дополнительно требуется, что в контейнерах должно находиться одинаковое количество коробок;

б) без дополнительного условия пункта *а*.

[Ответ] [Решение]

Задача 12 (ЕГЭ-2012)

Учитель в школе ставит отметки от 1 до 5. Средний балл ученика равен 4,625.

а) Какое наименьшее количество оценок может иметь ученик?

б) Если у ученика заменить оценки 3, 3, 5, 5 на две четвёрки, то на сколько максимально может увеличиться средний балл?

[Ответ] [Решение]

Задача 13 (ЕГЭ-2012)

Натуральные числа от 1 до 12 разбивают на четыре группы, в каждой из которых есть по крайней мере два числа. Для каждой группы находят сумму чисел этой группы. Для каждой пары групп находят модуль разности полученных сумм и полученные 6 чисел складывают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее возможное значение полученного результата?

[Ответ] [Решение]

Задача 14 (ЕГЭ-2012)

По окружности расставляют 48 ненулевых целых чисел с общей суммой 20. При этом любые два стоящих рядом числа должны отличаться не более чем на 7 и среди любых четырёх подряд идущих чисел должно быть хотя бы одно положительное.

а) Среди таких 48 чисел найдите наибольшее возможное количество положительных.

б) Среди таких 48 чисел найдите наименьшее возможное количество положительных.

[Ответ] [Решение]

3 Ответы

Задача 1

3 и 1161 [Условие] [Решение]

Задача 2

а) 48; б) отрицательных; в) 12 [Условие] [Решение]

Задача 3

а) да; б) нет [Условие] [Решение]

Задача 4

155 [Условие] [Решение]

Задача 5

а) нет; б) нет; в) да [Условие] [Решение]

Задача 6

а) да; б) нет [Условие] [Решение]

Задача 7

а) нет; б) нет; в) да [Условие] [Решение]

Задача 8

а) 1; б) 39 [Условие] [Решение]

Задача 9

а) нет; б) нет; в) 4 [Условие] [Решение]

Задача 10

а) да; б) 10; в) $8/17$ [Условие] [Решение]

Задача 11

а) 30; б) 2 [Условие] [Решение]

Задача 12

а) 8; б) на $5/56$ [Условие] [Решение]

Задача 13

а) нет; б) нет; в) 4 [Условие] [Решение]

Задача 14

а) 45; б) 12 [Условие] [Решение]

4 Решения

Задача 1 [Условие]

В первом наборе шесть чисел; обозначим $a_1 = \pm 6$, $a_2 = \pm 7$, ..., $a_6 = \pm 11$. Во втором наборе девять чисел; обозначим $b_1 = \pm 9$, $b_2 = \pm 10$, ..., $b_9 = \pm 17$.

Согласно условию строится следующая сумма:

$$\begin{aligned} S = {} & (a_1 + b_1) + (a_1 + b_2) + \ldots + (a_1 + b_9) + \\ & + (a_2 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_2 + b_9) + \\ & \ldots \\ & + (a_6 + b_1) + (a_6 + b_2) + \ldots + (a_6 + b_9). \end{aligned}$$

Приводя подобные, получаем:

$$S = 9(a_1 + a_2 + \ldots + a_6) + 6(b_1 + b_2 + \ldots + b_9),$$

или

$$S = 9A + 6B,$$

где $A = a_1 + a_2 + \ldots + a_6$ и $B = b_1 + b_2 + \ldots + b_9$.

1) Ясно, что сумма S получается наибольшей, когда все числа берутся с плюсом:

$$S_{\max} = 9 \cdot (6 + 7 + \ldots + 11) + 6 \cdot (9 + 10 + \ldots + 17) = 1161.$$

2) Заметим, что среди чисел a_1, ..., a_6 ровно три нечётных. Следовательно, A нечётно. Поэтому и $S = 9A + 6B$ нечётно. Кроме того, S делится на 3.

Наименьшее по модулю нечётное число, делящееся на 3, есть 3. Стало быть, $S \geqslant 3$ (оценка). Приведём пример расстановки знаков, при которой в оценке достигается равенство:

$$9 \cdot (6 - 7 + 8 - 9 + 10 - 11) + 6 \cdot (9 + 10 - 11 + 12 - 13 + 14 - 15 + 16 - 17) = 3.$$

Таким образом, $S_{\min} = 3$.

► Как мы додумались до этого примера? Вот некоторые наводящие соображения.

Пишем: $9A + 6B = 3$, то есть $3A + 2B = 1$. Следовательно, нам нужно добиться, чтобы $3A$ и $2B$ отличались на единицу (поскольку знаки можно расставлять как угодно). Сумму B можно сделать равной 5 (вычитая из 9 четыре единицы), а для A можно получить значение 3 (складывая три единицы). Тогда $3A = 9$, $2B = 10$, а это как раз то, что нам нужно. ◄

Задача 2 [Условие]

Напомним, что среднее арифметическое нескольких чисел есть сумма этих чисел, делённая на их количество.

Пусть на доске написано n чисел. Тогда их сумма: $S = -7n$. Обозначим: p — количество положительных чисел, m — количество отрицательных чисел, z — количество нулей. Таким образом, $n = p + m + z$.

Пусть S_+ и S_- — суммы положительных и отрицательных чисел соответственно. Имеем: $S_+ = 6p$, $S_- = -12m$, и так как $S = S_+ + S_-$, то:

$$-7n = 6p - 12m.$$

а) Правая часть данного равенства делится на 6. Поскольку 6 и 7 взаимно просты, число n делится на 6. Между числами 42 и 54 есть только одно такое число: $n = 48$.

б) Из равенства $-7 \cdot 48 = 6p - 12m$ получаем после сокращения на 6:

$$2m - p = 56.$$

Кроме того:

$$p + m + z = 48.$$

Сложим полученные равенства: $3m + z = 104$. Так как 104 при делении на 3 дает остаток 2, число z также даёт остаток 2: $z = 3k + 2$. Отсюда: $3m + 3k + 2 = 104$, или

$$m = 34 - k.$$

Соответственно,

$$p = 2m - 56 = 2(34 - k) - 56 = 12 - 2k.$$

Составляем разность: $p - m = (12 - 2k) - (34 - k) = -22 - k < 0$, так что $p < m$ — отрицательных чисел написано больше.

в) Из равенства $p = 12 - 2k$ видим, что $p \leqslant 12$.

Приведём пример с $p = 12$ (тогда $k = 0$, $z = 2$, $m = 34$). Пусть написано 12 чисел 6, 34 числа -12 и два нуля. Этот набор удовлетворяет условию задачи: среднее арифметическое положительных чисел равно, очевидно, 6; среднее арифметическое отрицательных чисел равно -12, а среднее арифметическое всех чисел:

$$\frac{12 \cdot 6 + 34 \cdot (-12)}{48} = -7.$$

Следовательно, наибольшее возможное количество положительных чисел равно 12.

Задача 3 [Условие]

Если среднее арифметическое любых 27 чисел набора меньше 2, то сумма любых 27 чисел набора меньше $27 \cdot 2 = 54$. Будучи натуральным числом, эта сумма не превосходит 53.

Обозначим S максимальную сумму 27 чисел данного набора. Итак, $S \leqslant 53$.

а) Да, может. Такой набор содержит 13 единиц, 17 двоек и 3, 4, 5. Для него, очевидно,

$$S = 3 + 4 + 5 + 17 \cdot 2 + 7 \cdot 1 = 53.$$

► Наводящее соображение очень простое. Если есть ровно 13 единиц и 3, 4, 5, то оставшиеся 17 вакансий заполняются как минимум двойками. Вот и возьмём набор с этими 17-ю двойками! Ясно, что максимальная сумма S получится, если в качестве слагаемых взять 3, 4, 5 и все двойки, добрав остаток единицами. ◄

б) Предположим, что набор содержит k единиц ($0 \leqslant k \leqslant 12$). Остальные $30 - k$ чисел набора (помимо 3, 4, 5) назовём вакантными. Вакантных чисел, стало быть, не менее 18, и каждое вакантное число не меньше 2.

Таким образом, наш набор содержит 3, 4, 5 и восемнадцать чисел, не меньших 2; остальные числа набора не меньше 1. Для максимальной суммы S тогда получаем:

$$S \geqslant 3 + 4 + 5 + 18 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 54.$$

Данное неравенство показывает, что набор не может содержать менее 13 единиц.

в) Заметим сразу, что если набор содержит не менее 16 единиц, то $16 \cdot 1 + 3 + 4 + 5 = 28$. Поэтому остаётся разобрать случаи, когда количество k единиц в наборе менее 16.

Остальные $30 - k$ чисел (помимо 3, 4, 5) продолжаем называть вакантными.

- $k = 13$. Легко видеть, что набор, предъявленный в пункте а), оказывается единственным набором с ровно тринадцатью единицами. В самом деле, для любого другого такого набора сумма 17-ти вакантных чисел будет больше $17 \cdot 2 = 34$, и сумма S станет больше 53.

  А для предъявленного набора имеем: $3 + 4 + 5 + 8 \cdot 2 = 28$.

- $k = 14$ или $k = 15$. Заметим, что среди вакантных чисел обязательно найдётся двойка. В самом деле, иначе все вакантные числа (которых, соответственно, 16 или 15) будут не меньше 3, и тогда их сумма окажется как минимум $15 \cdot 3 = 45$, что противоречит условию.

  Остаётся взять 14 единиц и эту двойку: $14 \cdot 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 28$.

Доказательство закончено.

Задача 4 [Условие]

Числа вида $n(n+1)/2$ будем называть запрещёнными. Вот начало последовательности запрещённых чисел: 1, 3, 6, 10, 15, ...

Пусть a и d — первый член и разность арифметической прогрессии. Так как число 1 запрещённое, то $a \geqslant 2$. Так как члены прогрессии — различные натуральные числа, то $d > 0$.

Если $d = 1$, то прогрессия будет содержать запрещённое число — например, 10. Если $d = 2$, то прогрессия также будет содержать запрещённое число — например, 10 для чётного a и 15 для нечётного a. Стало быть, $d \geqslant 3$.

Сумма S первых 10 членов прогрессии равна:

$$S = \frac{2a + 9d}{2} \cdot 10 = 10a + 45d.$$

С учётом полученных неравенств имеем оценку:

$$S \geqslant 10 \cdot 2 + 45 \cdot 3 = 155.$$

Нижнее значение 155 нашей оценки реализуется для прогрессии с $a = 2$ и $d = 3$ (то есть для прогрессии $2, 5, 8, \ldots$). Остаётся показать, что эта прогрессия не содержит запрещённых чисел.

Под номером k в данной прогрессии идёт число $2 + 3(k-1) = 3k - 1$. Нам нужно доказать, что равенство

$$3k - 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

невозможно ни при каких k и n. Перепишем это равенство в виде:

$$6k = n(n+1) + 2.$$

Число n при делении на 3 может давать остатки 0, 1 или 2. Рассмотрим отдельно каждый из этих случаев.

1. $n = 3m \Rightarrow 6k = 3m(3m+1) + 2$.
2. $n = 3m + 1 \Rightarrow 6k = (3m+1)(3m+2) + 2 = 9m^2 + 9m + 4$.
3. $n = 3m + 2 \Rightarrow 6k = (3m+2)(3m+3) + 2 = 3(3m+2)(m+1) + 2$.

Всюду имеем противоречие: левая часть $6k$ делится на 3, а правая часть на 3 не делится (остаток 2 в первом и третьем случаях, остаток 1 во втором случае).

Таким образом, прогрессия $2, 5, 8, \ldots$ действительно не содержит запрещённых чисел. Поскольку для неё $S = 155$, то 155 — наименьшее значение величины S.

Задача 5 [Условие]

Найдём каноническое разложение числа 1512:

$$1512 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7.$$

Пусть также $1512 = c_1c_2c_3c_4c_5$, где $c_1, \ldots, c_5$ — различные натуральные числа.

а) Предположим, что все пять чисел $c_1, \ldots, c_5$ образуют геометрическую прогрессию. Тогда согласно представлению конечной целочисленной геометрической прогрессии найдутся целые числа k, a, b такие, что:

$$c_1 = ka^4, \quad c_2 = ka^3b, \quad c_3 = ka^2b^2, \quad c_4 = kab^3, \quad c_5 = kb^4.$$

Не теряя общности, можно считать, что прогрессия возрастающая. Тогда $b > a$. Перемножая числа $c_1, \ldots, c_5$, получим:

$$1512 = k^5a^{10}b^{10}.$$

Выходит, что 1512 делится на 10-ю степень некоторого натурального числа $b > 1$. Но это противоречит каноническому разложению числа 1512 (где нет простых множителей в десятой степени). Следовательно, числа $c_1, \ldots, c_5$ не могут образовывать геометрическую прогрессию.

б) Предположим, что числа c_1, c_2, c_3, c_4 образуют возрастающую геометрическую прогрессию. Тогда:

$$c_1 = ka^3, \quad c_2 = ka^2b, \quad c_3 = kab^2, \quad c_4 = kb^3.$$

Перемножаем числа $c_1, \ldots, c_5$:

$$1512 = k^4a^6b^6c_5.$$

Снова противоречие: 1512 не может делиться на шестую степень натурального числа $b > 1$. Поэтому и в данном случае ответ отрицательный.

► Заметим, что из пункта б) следует пункт а). В самом деле, если среди сомножителей $c_1, \ldots, c_5$ не найдётся четырёх членов геометрической прогрессии, то пяти членов не найдётся и подавно. Поэтому решение можно было бы начать сразу с пункта б). Мы привели отдельное решение для пункта а) из методических соображений. ◄

в) Предъявляем соответствующий пример: $4 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 1 = 1512$. Числа 4, 6, 9 образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $3/2$.

► Пример найден следующим образом. Предположим, что числа c_1, c_2, c_3 образуют геометрическую прогрессию:

$$c_1 = ka^2, \quad c_2 = kab, \quad c_3 = kb^2.$$

Тогда $1512 = k^3a^3b^3c_4c_5$. Глядя на каноническое разложение числа 1512, берём $k = 1$, $a = 2$, $b = 3$, $c_4 = 7$, $c_5 = 1$. ◄

Задача 6 [Условие]

а) Да, может: 216, 252, 294, 343. Это геометрическая прогрессия со знаменателем $7/6$.

► Четыре числа, образующих геометрическую прогрессию, имеют вид:

$$ka^3, \quad ka^2b, \quad kab^2, \quad kb^3.$$

Остаётся заметить, что $6^3 = 216 > 210$, $7^3 = 343 < 350$, и положить $k = 1$.

Данный пример позволяет почувствовать также, что втиснуть в интервал от 210 до 350 пять чисел, образующих геометрическую прогрессию, уже вряд ли получится. Поэтому в пункте б) надо пытаться доказать, что это невозможно. ◄

б) Предположим, что прогрессия состоит из пяти членов:

$$ka^4, \quad ka^3b, \quad ka^2b^2, \quad kab^3, \quad kb^4.$$

Без ограничения общности считаем прогрессию возрастающей, так что $b > a$. Поскольку все члены прогрессии находятся между числами 210 и 350, имеем:

$$ka^4 > 210, \qquad (*)$$
$$kb^4 < 350. \qquad (**)$$

Из неравенства $(**)$ следует, что b может принимать только значения 2, 3 или 4. Рассмотрим эти три случая по отдельности.

- $b = 2$. Тогда $a = 1$. Имеем:

$$(*) \Rightarrow k > 210;$$
$$(**) \Rightarrow k < \frac{350}{2^4} < 21.$$

  Противоречие.

- $b = 3$. Тогда $a = 1$ или $a = 2$. Имеем:

$$(*) \Rightarrow k > \frac{210}{2^4} > 13;$$
$$(**) \Rightarrow k < \frac{350}{3^4} < 5.$$

  Противоречие.

- $b = 4$. Тогда $a = 1, 2$ или 3. Имеем:

$$(*) \Rightarrow k > \frac{210}{3^4} > 2;$$
$$(**) \Rightarrow k < \frac{350}{4^4} < 2.$$

  Снова противоречие.

Противоречия, полученные во всех трёх случаях, показывают, что прогрессия не может состоять из пяти членов.

Задача 7 [Условие]

а) Предположим, что в последовательности три члена. Тогда она имеет вид: $1, a, 2046$.

Если эти числа образуют арифметическую прогрессию, то $2a = 1 + 2046$. Имеем противоречие: левая часть чётна, а правая нечётна.

Если эти числа образуют геометрическую прогрессию, то $a^2 = 1 \cdot 2046$. Снова противоречие, ибо 2046 не является квадратом натурального числа ($45^2 = 2025 < 2046 < 46^2 = 2116$).

Поэтому три члена в последовательности быть не может.

б) Предположим, что в последовательности четыре члена: $1, a, b, 2046$. Логически возможны четыре случая.

1. Первые три числа образуют арифметическую прогрессию и вторые три числа образуют арифметическую прогрессию (то есть все четыре числа образуют арифметическую прогрессию). Тогда имеем:
$$2a = 1 + b, \quad 2b = a + 2046.$$
Выражаем b из первого равенства и подставляем во второе:
$$b = 2a - 1 \Rightarrow 4a - 2 = a + 2046 \Rightarrow 3a = 2048.$$
Противоречие: левая часть делится на 3, а правая не делится.

2. Первые три числа образуют арифметическую прогрессию, а вторые три числа образуют геометрическую прогрессию. Тогда:
$$2a = 1 + b, \quad b^2 = 2046a.$$
После исключения b:
$$(2a - 1)^2 = 2046a.$$
Слева стоит квадрат нечётного числа, который также является нечётным числом. Справа стоит чётное число. Противоречие.

3. Первые три числа образуют геометрическую прогрессию, вторые три числа образуют арифметическую прогрессию. Тогда:
$$a^2 = b, \quad 2b = a + 2046.$$
Приходим к квадратному уравнению: $2a^2 - a - 2046 = 0$. Его дискриминант 16369 не является квадратом натурального числа ($127^2 < 16369 < 128^2$). Значит, это уравнение не имеет натуральных корней.

4. Первые три числа образуют геометрическую прогрессию и вторые три числа образуют геометрическую прогрессию (то есть все четыре числа образуют геометрическую прогрессию). Тогда:
$$a^2 = b, \quad b^2 = 2046a.$$
Отсюда $a^4 = 2046a$, то есть $a^3 = 2046$. Это невозможно, поскольку 2046 не является кубом натурального числа ($12^3 < 2046 < 13^3$).

Итак, в каждом случае получаем противоречие. Следовательно, данная последовательность не может состоять из четырёх членов.

в) В последовательности может быть менее 2046 членов. Вот пример арифметической прогрессии из шести чисел: 1, 410, 819, 1228, 1637, 2046.

► Сконструируем арифметическую прогрессию с первым членом 1 и n-м членом 2046. Пусть разность этой прогрессии равна d. Имеем:
$$2046 = 1 + (n - 1)d \Rightarrow (n - 1)d = 2045.$$
Полагаем $n = 6$, находим $d = 2045 : 5 = 409$ и выписываем прогрессию. ◄

Задача 8 [Условие]

а) В последовательности не менее одного члена. Но последовательность, состоящая из одного числа 163, удовлетворяет условию задачи. Поэтому наименьшее возможное число членов последовательности равно 1.

б) Заметим прежде всего, что последовательность не может состоять только из чередующихся чисел 1 и 7. В самом деле, если такая последовательность содержит чётное число членов, то её сумма делится на 8. Если же число членов нечётно, то при делении суммы последовательности на 8 могут получиться только остатки 1 или 7 — в случаях $(1, 7, \ldots, 1, 7, 1)$ и $(7, 1, \ldots 7, 1, 7)$ соответственно. Однако число 163 при делении на 8 даёт остаток 3.

Стало быть, в последовательности имеется число b, отличное от 1 и 7. Ясно, что $b \geqslant 11$.

Покажем, что в последовательности не может быть более 39 чисел. Предположим обратное: пусть в последовательности имеется не менее 40 членов. Первые 40 чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_{40} этой последовательности разобьём на пары: (a_1, a_2), (a_3, a_4), $\ldots$, (a_{39}, a_{40}). Имеются две возможности.

1. Число b не попадает ни в одну из этих первых 20 пар. Поскольку сумма чисел в каждой паре не менее 8, сумма всех членов последовательности будет не менее $8 \cdot 20 + b \geqslant 171$ вопреки условию.

2. Число b попадает в одну из первых 20 пар. Сумма чисел в этой паре не менее $1 + 11 = 12$, сумма чисел во всех оставшихся 19 парах не менее $19 \cdot 8 = 152$. Тогда сумма последовательности оказывается не менее $12 + 152 = 164$, а это снова противоречит условию.

Таким образом, последовательность содержит менее 40 членов. Предъявим пример последовательности, удовлетворяющей условию и состоящей из 39 членов. Она состоит из 19 пар $(7, 1)$ и заканчивается числом 11:

$$\underbrace{7, 1, 7, 1, \ldots, 7, 1}_{\text{19 пар}}, 11.$$

Действительно, сумма такой последовательности равна $19 \cdot 8 + 11 = 163$.

Итак, наибольшее возможное число членов последовательности равно 39.

Задача 9 [Условие]

Присвоим каждой карточке номер от 1 до 10. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ — числа, данные в условии и записанные на карточках вначале (число a_k записано на карточке с номером k). Аналогично, b_1, b_2, $\ldots$, b_{10} — числа того же набора, но записанные на карточках после их перемешивания. Согласно условию рассматриваем число:

$$c = (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \ldots (a_{10} + b_{10}). \qquad (*)$$

а) Предположим, что $c = 0$. Тогда в произведении $(*)$ найдётся нулевой множитель, то есть $a_k + b_k = 0$ для некоторого k. Но это невозможно, так как в данном наборе ни для какого числа a_k нет ему противоположного по знаку. Значит, 0 получиться не может.

б) Предположим, что c нечётно. Тогда в произведении $(*)$ каждый множитель должен быть нечётным, то есть $a_k + b_k$ нечётно для любого k $(1 \leqslant k \leqslant 10)$.

Следовательно, для каждого k в паре (a_k, b_k) одно число чётное, а другое нечётное. Поэтому в последовательности $(a_1, \ldots, a_{10}, b_1 \ldots, b_{10})$ окажется 10 чётных и 10 нечётных чисел. Однако из условия вытекает, что указанная последовательность содержит 8 чётных чисел и 12 нечётных.

Возникшее противоречие показывает, что c обязано быть чётным. В частности, 1 получиться не может.

в) Далее считаем, что $c > 0$. Предположим, что $c = 2$. Тогда в произведении $(*)$ ровно один из множителей по модулю равен 2, а все остальные по модулю равны 1. Иными словами, $a_m + b_m = \pm 2$ для некоторого m и $a_k + b_k = \pm 1$ для всех остальных k.

Числа a_m и b_m оба чётные или оба нечётные. В каждой из остальных девяти пар (a_k, b_k) одно число чётное, а другое нечётное. Стало быть, в последовательности $(a_1, \ldots, a_{10}, b_1 \ldots, b_{10})$

окажется или 11 чётных и 9 нечётных чисел (если a_m и b_m чётны), или, наоборот, 9 чётных и 11 нечётных чисел (если a_m и b_m нечётны). Но, как было указано выше, чётных и нечётных чисел в этой последовательности имеется 8 и 12 соответственно.

Значит, случай $c = 2$ невозможен. Поскольку c чётно, имеем оценку: $c \geqslant 4$.

Приведём пример, в котором достигается равенство $c = 4$. Пусть сначала на карточках написаны числа в исходном порядке:

$$1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9, 10, -11.$$

Затем на тех же карточках оказались числа:

$$-2, 1, 4, -3, 7, -5, 9, -8, -11, 10.$$

Получаем:

$$c = (1-2)(-2+1)(-3+4)(4-3)(-5+7)(7-5)(-8+9)(9-8)(10-11)(-11+10) = 4.$$

Следовательно, наименьшее неотрицательное значение c равно 4.

Задача 10 [Условие]

Пусть m — число мальчиков, d — число девочек в группе. Пусть m_1 мальчиков сходили в театр, m_2 мальчиков сходили в кино, d_1 девочек сходили в театр, d_2 девочек сходили в кино.

Для случая похода в театр имеем:

$$m_1 \leqslant \frac{3}{11}(m_1 + d_1) \Rightarrow 8m_1 \leqslant 3d_1.$$

Для случая посещения кино:

$$m_2 \leqslant \frac{3}{7}(m_2 + d_2) \Rightarrow 4m_2 \leqslant 3d_2.$$

Сложим первое из полученных неравенств с удвоенным вторым:

$$8(m_1 + m_2) \leqslant 3d_1 + 6d_2.$$

Поскольку каждый мальчик сходил либо в театр, либо в кино, имеем $m_1 + m_2 \geqslant m$. Кроме того, очевидно, $d_1 \leqslant d$ и $d_2 \leqslant d$. Получаем:

$$8m \leqslant 8(m_1 + m_2) \leqslant 3d + 6d,$$

то есть

$$8m \leqslant 9d. \qquad (*)$$

а) Да, 10 мальчиков могло быть в группе из 20 учащихся. Например, в театр сходили 3 мальчика и все 10 девочек, в кино — остальные 7 мальчиков и 10 девочек. Нужные неравенства выполнены:

$$3 \leqslant \frac{3}{11} \cdot (3 + 10), \quad 7 \leqslant \frac{3}{7} \cdot (7 + 10).$$

► Как построен пример? Прежде всего, значения $m = 10$ и $d = 10$ не противоречат неравенству $(*)$, и это наводит на мысль, что пример тут возможен. Затем берём неравенства $8m_1 \leqslant 3d_1$ и $4m_2 \leqslant 3d_2$, задействуем девочек по максимуму ($d_1 = d_2 = 10$) и находим подходящие m_1 и m_2. ◄

б) Предположим, что в группе из 20 учащихся имеется не менее 11 мальчиков: $m \geqslant 11$. Тогда $d \leqslant 9$. Имеем: $8m \geqslant 88$, $9d \leqslant 81$, что противоречит неравенству $(*)$. Следовательно, $m \leqslant 10$, и с учётом пункта а) приходим к выводу, что наибольшее возможное количество мальчиков в группе равно 10.

в) Перепишем неравенство $(*)$ следующим образом:

$$8m \leqslant 9d \Rightarrow \frac{m}{d} \leqslant \frac{9}{8} \Rightarrow \frac{m}{d} + 1 \leqslant \frac{17}{8} \Rightarrow \frac{m+d}{d} \leqslant \frac{17}{8} \Rightarrow \frac{d}{m+d} \geqslant \frac{8}{17}.$$

Как видим, доля девочек не меньше $8/17$. Приведём пример, когда равенство достигается. Пусть в группе 9 мальчиков и 8 девочек. В театр сходили 3 мальчика и 8 девочек, в кино сходили 6 мальчиков и 8 девочек. Нужные неравенства выполнены:

$$3 \leqslant \frac{3}{11} \cdot (3+8), \quad 6 \leqslant \frac{3}{7} \cdot (6+8).$$

Следовательно, наименьшая возможная доля девочек равна $8/17$.

Задача 11 [Условие]

а) Всего имеется $33 + 27 = 60$ коробок. Значит, в каждом контейнере должно находиться по 30 коробок.

Пусть x — количество лёгких (по 19 кг) коробок в первом контейнере. Тогда число тяжёлых (по 49 кг) коробок в первом контейнере равно $30 - x$. Во втором контейнере лёгких коробок получается $33 - x$, а тяжёлых коробок: $27 - (30 - x) = x - 3$.

Суммарные массы коробок в первом и втором контейнерах равны соответственно:

$$m_1 = 19x + 49(30 - x) = 1470 - 30x,$$
$$m_2 = 19(33 - x) + 49(x - 3) = 480 + 30x.$$

Отсюда:

$$S = |m_2 - m_1| = |60x - 990| = 30|2x - 33|.$$

Число $|2x - 33|$ является нечётным и принимает наименьшее возможное значение 1 при $x = 16$ или $x = 17$. Следовательно, наименьшее значение S равно 30.

б) Пусть в первом контейнере находится x лёгких коробок и y тяжёлых коробок. Тогда во втором контейнере будет $33 - x$ и $27 - y$ лёгких и тяжёлых коробок соответственно. Имеем:

$$m_1 = 19x + 49y,$$
$$m_2 = 19(33 - x) + 49(27 - y) = 1950 - 19x - 49y.$$

При этом имеют место неравенства:

$$x \leqslant 33, \quad y \leqslant 27. \qquad (1)$$

Величина S равна:

$$S = |38x + 98y - 1950| = 2|19x + 49y - 975|.$$

Нам, таким образом, требуется найти минимальное значение S при условии, что выполнены оба неравенства (1).

Заметим, что возможен прямой перебор всех значений x и y ($0 \leqslant x \leqslant 33$, $0 \leqslant y \leqslant 27$), то есть последовательное рассмотрение всех $34 \cdot 28$ вариантов. Вообще, исчерпывающий перебор конечного числа вариантов — это полноценное решение задачи! Но мы, естественно, таким путём не пойдём и поищем способ избежать прямого перебора.

Прежде всего проверим, не может ли S равняться нулю. Для этого рассмотрим уравнение:

$$19x + 49y = 975. \qquad (2)$$

Будем использовать остатки от деления на 7. Перепишем уравнение (2) следующим образом:

$$5x + 14x + 49y = 975.$$

Нетрудно проверить, что 975 даёт остаток 2 ($975 = 139 \cdot 7 + 2$). Значит, и слагаемое $5x$ даёт остаток 2 (ведь остальные слагаемые в левой части делятся на 7). Какой остаток при этом даёт сам x? Перебор остатков от 0 до 6 показывает, что единственная возможность — это остаток 6, то есть

$$x = 7k + 6. \qquad (3)$$

Подставляем (3) в (2):

$$19(7k + 6) + 49y = 975,$$
$$19 \cdot 7k + 49y = 861,$$

и после сокращения на 7:

$$19k + 7y = 123. \qquad (4)$$

Благодаря этому сокращению уравнение (4) проще уравнения (2). Давайте повторим всю эту процедуру — теперь уже применительно к уравнению (4). Начинаем так же:

$$5k + 14k + 7y = 123.$$

Правая часть 123 даёт остаток 4 ($123 = 17 \cdot 7 + 4$). Значит, и $5k$ даёт остаток 4. Тогда k может давать только остаток 5:

$$k = 7m + 5. \qquad (5)$$

Подставляя (5) в (3), получим: $x = 7(7m + 5) + 6 = 49m + 41$. Таким образом, оказывается, что $x \geqslant 41$ — вопреки первому неравенству (1).

Итак, уравнение (2) не имеет решений, удовлетворяющих (1). Поэтому $S \neq 0$.

► А какие решения есть? Давайте всё же доведём до конца решение уравнения (2) — полезно посмотреть, чем дело кончится. Подставим (5) в (4):

$$19(7m + 5) + 7y = 123,$$
$$19 \cdot 7m + 7y = 28,$$
$$19m + y = 4.$$

Отсюда видно, что единственная возможность — это $m = 0$ и $y = 4$. Остаётся найти x. Из (5) и (3) последовательно получаем: $k = 7 \cdot 0 + 5 = 5$, $x = 7 \cdot 5 + 6 = 41$.

Итак, уравнение (2) имеет единственное решение $(41, 4)$ в натуральных числах. Это решение не удовлетворяет условию (1). ◄

Поскольку S является чётным числом, имеем оценку: $S \geqslant 2$. Равенство достигается, например, в случае $x = 23$ и $y = 11$:

$$S = 2 \cdot |19 \cdot 23 + 49 \cdot 11 - 975| = 2 \cdot |976 - 975| = 2.$$

Следовательно, наименьшее значение S равно 2.

► Как найден пример? Берём уравнение $19x+49y = 976$ и решаем его тем же способом — через остатки от деления на 7. Упражняйтесь! ◄

Задача 12 [Условие]

а) Пусть ученик имеет n оценок и S — их сумма. Тогда:

$$\frac{S}{n} = 4{,}625 = 4\,\frac{5}{8} = \frac{37}{8}\,.$$

Отсюда $37n = 8S$, так что n делится на 8. Поэтому $n \geqslant 8$.

Приведём пример с $n = 8$. Пусть ученик имеет семь пятёрок и двойку. Тогда его средний балл:

$$\frac{7 \cdot 5 + 2}{8} = \frac{37}{8}\,.$$

Итак, наименьшее возможное количество оценок ученика равно 8.

б) Пусть ученик имел оценки 3, 3, 5, 5, a_1, a_2, $\ldots$, a_k. Обозначим

$$A = a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

Заметим сразу, что

$$A \leqslant 5k. \qquad (1)$$

Посмотрим, какие ограничения на k накладывает тот факт, что средний балл равен 4,675. Сумма оценок ученика равна $16 + A$, количество оценок равно $4 + k$, так что

$$\frac{16 + A}{4 + k} = \frac{37}{8}\,.$$

Отсюда легко получаем:

$$8A = 37k + 20. \qquad (2)$$

Правая часть $37k + 20$ должна делиться на 8. Число 20 при делении на 8 даёт остаток 4. Значит, $37k$ при делении на 8 также должно давать остаток 4. Какой остаток даёт само k? Поскольку $37k = 32k + 5k$ и $32k$ делится на 8, число $5k$ при делении на 8 даёт остаток 4. Перебирая остатки от 0 до 7, легко видим, что и k даёт остаток 4:

$$k = 8m + 4 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (3)$$

Подставляем это в (2):

$$8A = 37(8m + 4) + 20 = 37 \cdot 8m + 168,$$

и после сокращения на 8 получим:

$$A = 37m + 21. \qquad (4)$$

Теперь подставляем (3) и (4) в неравенство (1):

$$37m + 21 \leqslant 5(8m + 4),$$

откуда $3m \geqslant 1$, то есть $m \geqslant 1$. Вместе с (3) это даёт нам нужное неравенство на k:

$$k \geqslant 12.$$

Пусть теперь оценки ученика стали 4, 4, a_1, a_2, $\ldots$, a_k. Сумма оценок равна $8+A$, количество оценок равно $2+k$. Находим изменение среднего балла:

$$\Delta = \frac{8+A}{2+k} - \frac{37}{8} = \frac{64+8A-37(2+k)}{8(2+k)} = \frac{8A-37k-10}{8(2+k)}\,.$$

С учётом (2) имеем:

$$\Delta = \frac{10}{8(2+k)} = \frac{5}{4(2+k)}\,.$$

Максимальное значение Δ достигается при минимально возможном значении k, равном 12:

$$\Delta_{\max} = \frac{5}{4(2+12)} = \frac{5}{56}\,.$$

Таким образом, максимальное увеличение среднего балла составляет $5/56$.

Задача 13 [Условие]

Пусть A, B, C и D — суммы чисел в четырёх группах. Согласно условию нас интересует сумма:

$$S = |A-B| + |A-C| + |A-D| + |B-C| + |B-D| + |C-D|. \qquad (1)$$

Ясно, что S — целое неотрицательное число.

Отметим сразу же, что

$$A+B+C+D = 1+2+\ldots+12 = 78. \qquad (2)$$

а) Предположим, что $S=0$. Тогда все шесть слагаемых в (1) равны нулю, что немедленно даёт $A=B=C=D$. Но это невозможно ввиду (2), поскольку 78 не делится на 4. Следовательно, 0 в результате получиться не может.

б) Предположим, что $S=1$. Тогда одно слагаемое в (1) равно единице, а остальные пять слагаемых равны нулю.

Без ограничения общности можно считать, что $|A-B|=1$. Но тогда из $|A-C|=0$ и $|B-C|=0$ получаем соответственно $A=C$ и $B=C$, то есть $A=B$. Возникшее противоречие показывает, что 1 в результате получиться не может.

в) Заметим, что имеется самое большее три слагаемых в (1), которые не содержат фиксированную букву (например, букву D не содержат слагаемые $|A-B|$, $|B-C|$ и $|A-C|$). Поэтому если взять любые четыре слагаемых в (1), то в них непременно будут фигурировать все четыре буквы A, B, C, D.

Таким образом, если четыре каких-то слагаемых в (1) равны нулю, то $A=B=C=D$. Данное равенство, как было отмечено выше, невозможно. Следовательно, *никакие четыре слагаемых в* (1) *не могут равняться нулю.*

Иными словами, как минимум три слагаемых в (1) должны быть отличны от нуля. Тем самым оказывается невозможным случай $S=2$.

Предположим, что $S=3$. Тогда три слагаемых в (1) равны единице, а остальные три — нулю. При этом нулю могут равняться лишь такие три слагаемых, которые не содержат некоторой буквы (в противном случае — когда в трёх нулевых слагаемых фигурируют все четыре буквы A, B, C, D — остальные три слагаемых также обратятся в нуль).

Пусть, например, $|A-B|=|A-C|=|B-C|=0$, то есть $A=B=C$. Тогда $D=A\pm1$, и

$$78 = A+B+C+D = 4A\pm1.$$

Получаем противоречие: слева стоит чётное число, а справа — нечётное. Значит, $S = 3$ невозможно.

Приведём пример с $S = 4$. Группы возьмём такие:

$$(1, 3, 4, 5, 6), \quad (2, 7, 10), \quad (9, 11), \quad (8, 12).$$

Здесь $A = 19$, $B = 19$, $C = 20$, $D = 20$. Подставляем в (1):

$$S = 0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 0 = 4.$$

Тем самым доказано, что наименьшее возможное значение S равно 4.

Задача 14 [Условие]

Пусть по кругу расставлены числа a_1, a_2, …, a_{48}. Количество положительных чисел среди них обозначим p.

а) Поскольку сумма всех чисел равна 20, среди них есть как положительные, так и отрицательные. Поэтому $p \neq 48$.

Пусть $p = 47$. В этом случае сумма положительных чисел не менее 47. Но тогда единственное отрицательное число меньше или равно -27 и потому отличается от соседних чисел более чем на 7. Это противоречит условию. Значит, $p \neq 47$.

Пусть $p = 46$. Сумма положительных чисел не менее 46. Отрицательных чисел всего два, и их сумма меньше или равна -26. Значит, одно из отрицательных чисел меньше или равно -13. Это число отличается от соседнего положительного числа более чем на 7. Поэтому $p \neq 46$.

Приведём пример, когда $p = 45$. Положим

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{45} = 1,\ a_{46} = -6,\ a_{47} = -13,\ a_{48} = -6.$$

Легко видеть, что все условия задачи выполнены. Следовательно, наибольшее возможное значение p равно 45.

б) Из того, что среди любых четырёх подряд идущих чисел имеется хотя бы одно положительное, следует, что $p \geqslant 12$. В самом деле, разобьём наши 48 чисел на 12 четвёрок:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4),\ (a_5, a_6, a_7, a_8),\ \ldots,\ (a_{45}, a_{46}, a_{47}, a_{48}).$$

Если $p < 12$, то по крайней мере в одной четвёрке не будет положительного числа — вопреки условию.

Остаётся предъявить пример с $p = 12$. Пусть

$$\underbrace{a_4 = a_8 = a_{12} = \ldots = a_{44}}_{\text{11 чисел}} = 5,\ a_{48} = 1,$$

а остальные 36 чисел равны -1. Легко проверить, что условия задачи выполнены. Стало быть, наименьшее возможное значение p равно 12.