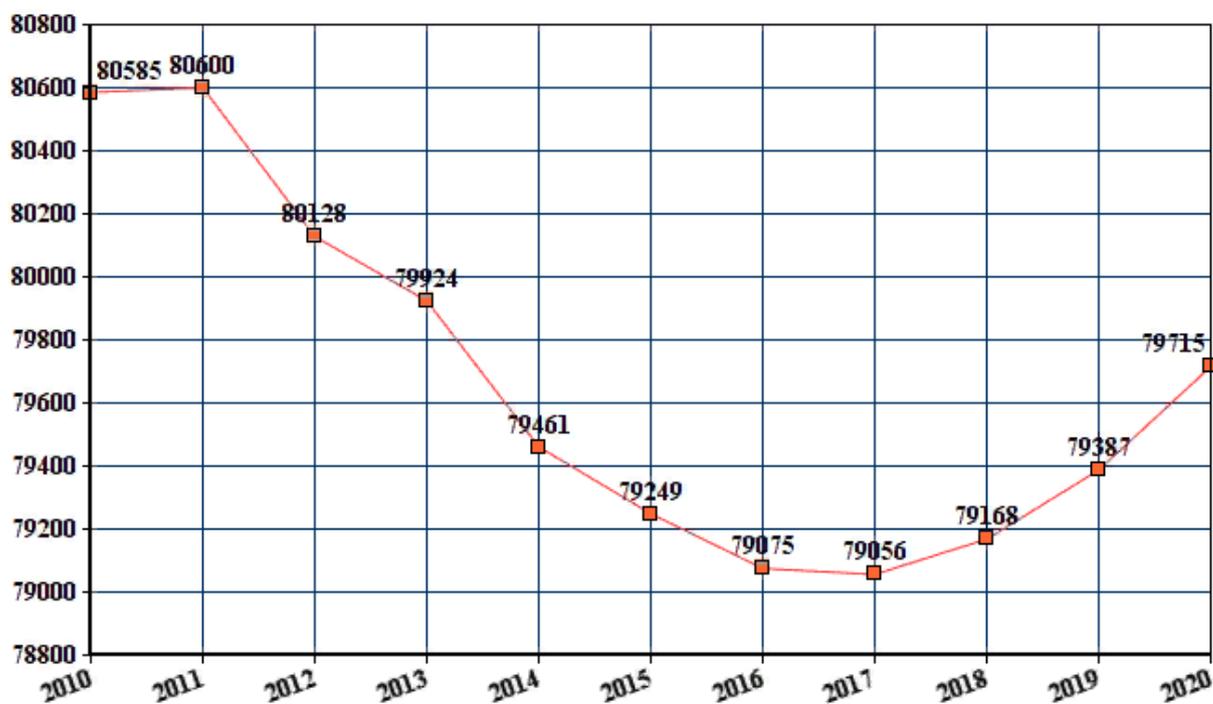


## Вариант 5

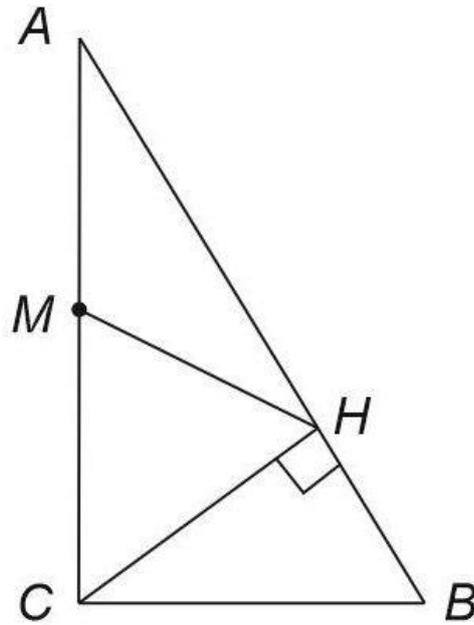
### Часть 1. Задания с кратким ответом

1. В фирме такси работают 54 водителя. Сколько выходных может иметь каждый водитель в месяц (30 дней), если ежедневно из 60 имеющихся у фирмы автомобилей 25% остаются в гараже для мелкого ремонта?
2. На графике показано изменение численности населения города Клин (Московская область) за последние 10 лет. Определите по графику, в каком году из указанного периода численность населения города Клин была наименьшей\*.



3. *Анна Малкова*

В прямоугольном треугольнике  $ABC$  с прямым углом  $C$  проведена высота  $CH$ ; точка  $M$  – середина катета  $AC$ . Найдите  $MH$ , если  $BC = 7$ ,  $BH = \frac{14}{\sqrt{5}}$ .



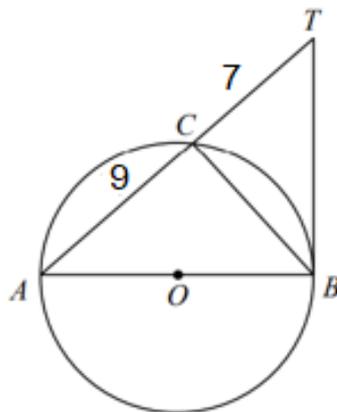
4. *Анна Малкова* Два грузовика, работая совместно, вывозят снег с улицы Нижняя Подгорная, причем первый грузовик должен сделать три рейса с грузом снега, а второй - два. Вероятность застрять с грузом снега при подъеме в горку равна 0,2 для первого грузовика и 0,25 - для второго. С какой вероятностью грузовики вывезут снег с улицы Нижняя Подгорная, ни разу не застряв на горке?

5. Решите уравнение:

$$2 \log_x 27 - 3 \log_{27} x = 1.$$

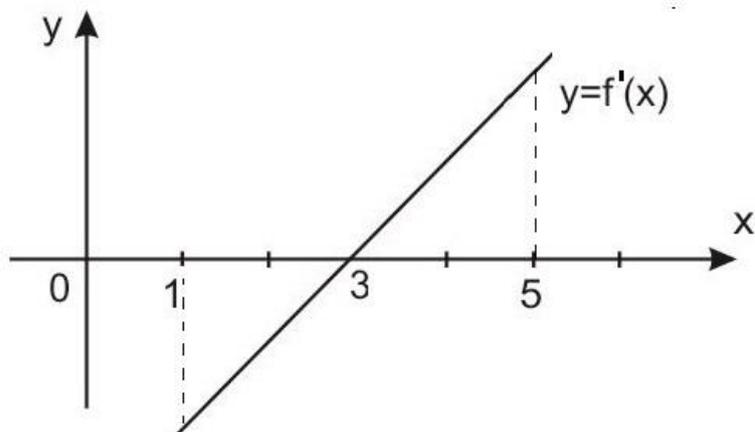
Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из них.

6. К окружности с центром в точке  $O$  проведены касательная  $TB$  и секущая  $TA$ , пересекающая окружность также в точке  $C$ , причем  $AC = 9$ ,  $TC = 7$ . Найдите радиус окружности.



7. Анна Малкова На рисунке изображен график  $y = f'(x)$  - производной функции

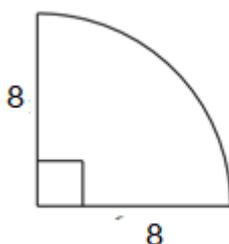
$y = f(x)$ . В какой точке отрезка  $[1; 5]$  функция  $y = f(x)$  принимает наименьшее значение?



8. Найдите значение выражения:

$$\sin^2 \alpha + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$$

9. Найдите площадь поверхности  $S$  объемного тела, полученного при вращении данной фигуры вокруг вертикальной оси. В ответе запишите  $S/\pi$ .



10. Рейтинг  $R$  интернет-магазина вычисляется по формуле

$$R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K + 1) \frac{0,02K}{r_{\text{пок}} + 0,1}}$$

где  $r_{\text{пок}}$  — средняя оценка магазина покупателями (от 0 до 1),  $r_{\text{экс}}$  — оценка магазина экспертами (от 0 до 0,7) и  $K$  — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина «Бета», если число покупателей, оставивших отзыв о магазине, равно 20, их средняя оценка равна 0,65, а оценка экспертов равна 0,37.

11. Численность медведей в двух заповедниках в 2019 году составляла 220 особей. Через год обнаружили, что в первом заповеднике численность медведей возросла на 10%, а во втором на 20%. В результате общая численность медведей в двух заповедниках составила 250 особей. Сколько медведей было во втором заповеднике в 2019 году?
12. Найдите разность наибольшего и наименьшего значений функции  $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ , на отрезке  $[-2; 2]$

## Часть 2. Задания с развернутым ответом

13. а) Решите уравнение:  $81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30$ .  
б) Найдите все корни уравнения на отрезке  $[-\pi; 5\pi/4]$
14. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$  с вершиной  $S$  боковое ребро вдвое больше стороны основания.  
а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер  $SA$  и  $SD$  и вершину  $C$ , делит апофему грани  $ASB$  в отношении 2:1, считая от вершины  $S$ .  
б) Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер  $SA$  и  $SD$  и вершину  $C$ , делит ребро  $SF$ , считая от вершины  $S$ .
15. Решите неравенство:

$$\log_5 x + \log_x \frac{x}{3} < \frac{\log_5 x (2 - \log_3 x)}{\log_3 x}.$$

16. Из вершины  $C$  прямого угла прямоугольного треугольника  $ABC$  проведена высота  $CH$ .  
а) Докажите, что отношение площадей кругов, построенных на отрезках  $AH$  и  $BH$  соответственно как на диаметрах равно  $\operatorname{tg}^4 \angle ABC$ .  
б) Пусть точка  $O_1$  — центр окружности диаметра  $AH$ , вторично пересекающей отрезок  $AC$  в точке  $P$ , а точка  $O_2$  — центр окружности с диаметром  $BH$ , вторично пересекающей отрезок  $BC$  в точке  $Q$ . Найдите площадь четырёхугольника  $O_1PQO_2$ , если  $AC = 22$ ,  $BC = 18$ .
17. Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят  $t^2$  тыс. рублей в конце года  $t (t = 1, 2, \dots)$ . В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на

счёте будет увеличиваться в  $1 + r$  раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счёте была наибольшей. Расчёты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года. При каких положительных значениях  $r$  это возможно?

18. При каких значениях параметра  $a$  система

$$\begin{cases} \sin(2\pi\sqrt{a^2 - x^2}) = 0, \\ 2 \cdot 3^{|ax|} + 3^{2-|ax|} \leq 19 \end{cases}$$

имеет наибольшее число решений?

19. Длины сторон прямоугольника — натуральные числа, а его периметр равен 200. Известно, что длина одной стороны прямоугольника равна  $n\%$  от длины другой стороны, где  $n$  — также натуральное число.

- а) Какое наибольшее значение может принимать площадь прямоугольника?
- б) Какое наименьшее значение может принимать площадь прямоугольника?
- в) Найдите все возможные значения, которые может принимать площадь прямоугольника, если дополнительно известно, что  $n > 100$ .

*\*График с сайта [gorodarus.ru](http://gorodarus.ru)*

*В варианте использованы задачи с сайта РешуЕГЭ, из сборников под редакцией И. В. Яценко, М. И. Сканава, Козко, Парфенова и Чирского, а также авторские задачи.*