Вариант 7

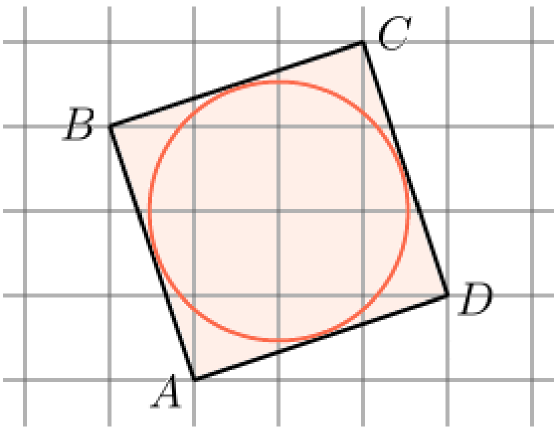
Часть 1. Задания с кратким ответом

1. Скорый поезд вышел из Москвы в Санкт-Петербург и шел без остановок со скоростью 60 километров в час. Другой поезд вышел ему навстречу из Санкт-Петербурга в Москву и тоже шел без остановок со скоростью 40 километров в час. На каком расстоянии будут эти поезда за 1 час до их встречи?

2. На диаграмме показано среднемесячное количество осадков в Санкт-Петербурге за каждый месяц (усредненные данные, собранные за последние три года).

   Определите по диаграмме, сколько было месяцев, когда количество осадков превышало 10 мм.

3. На клетчатой бумаге с размером клетки $1 \cdot 1$ изображен квадрат ABCD. Найдите площадь S вписанного в него круга. В ответ запишите $\frac{S}{\pi}$.



4. *Анна Малкова*
   Студентка Маша учится в МГУ. Если утром светит солнце, Маша посещает первую лекцию с вероятностью 0,7. Если в момент пробуждения Маши пасмурно, то с вероятностью 0,8 Маша снова засыпает и пропускает первую лекцию.

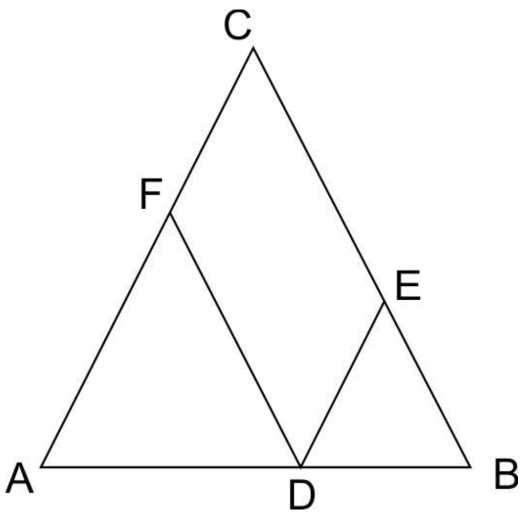
   Утром 1 апреля вероятность солнечной погоды в Москве оценивается в 25%.

   С какой вероятностью Маша будет присутствовать 1 апреля на первой лекции?

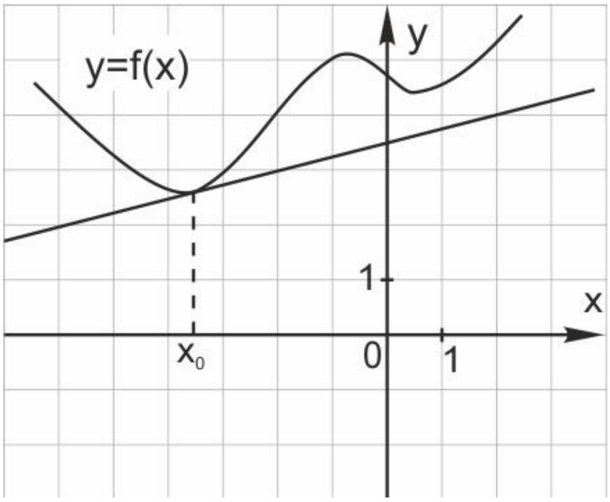
5. Решите уравнение $\log_2 \sqrt{(1-x)^2} = 3$.

   Если уравнение имеет несколько корней, в ответе запишите больший корень.

6. *Анна Малкова*
   Точки D, E, F лежат на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC так, что AD : BD = 2 : 1, FD || BC и DE || AC. Площадь четырехугольника CFDE равна 4. Найдите площадь треугольника ABC.



7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известно, что $AB = \sqrt{3}AA_1$. Найдите угол между прямыми AB_1 и CC_1. Ответ дайте в градусах.

9. *Ольга Чемезова*

Вычислите:

$$5^{\frac{1}{\log_{11} 5}} + (\log_7 16 - \log_7 2) \cdot \log_2 7$$

10. Если достаточно быстро вращать ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведёрка сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет положительной во всех точках траектории, кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна $P = m\left(\frac{v^2}{L} - g\right)$, где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведёрка в м/с, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте g = 10 м/с^2). С какой наименьшей скоростью надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна 44,1 см? Ответ выразите в м/с.

11. От пристани А одновременно отправились вниз по течению катер и плот. Катер спустился вниз по течению на 96 км, затем повернул обратно и вернулся в А через 14 часов. Найдите скорость катера, если известно, что катер встретил плот на обратном пути на расстоянии 24 км от А. Ответ выразите в км/ч.

12. Найдите точку минимума функции $y = -\frac{x}{x^2+676}$.

Часть 2. Задания с развернутым ответом

13. *Анна Малкова*

$$4\sin^2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+4\cos^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\sqrt{3}=4$$

а) Решить уравнение

б) Найти все корни уравнения на отрезке $[3\pi; 4\pi]$.

14. *Ирина Юдина* Восьмигранник $SABCDS_1$ (бипирамида) состоит из двух равных правильных четырехугольных пирамид с общим основанием ABCD, причем S и S_1 – нижняя и верхняя вершины соответственно.

Плоскость α проходит через середины отрезков AS_1, CS и AB.

а) Докажите, что сечение бипирамиды плоскостью α имеет более двух пар параллельных сторон.

б) Найдите площадь сечения, если $SS_1 = 26, \quad AD = 5\sqrt{2}$.

15. Решите неравенство:

$$\log_7\left(\left(5^{-x^2}-5\right)\left(5^{-x^2+16}-1\right)\right)+\log_7\frac{5^{-x^2}-5}{5^{-x^2+16}-1}>\log_7\left(5^{13-x^2}-4\right)^2.$$

16. *Ирина Юдина* Две окружности ω_1 и ω_2 радиуса 32 с центрами P и Q, пересекаясь, делят отрезок PQ на три равные части.

а) Докажите, что центр O окружности ω, касающейся внутренним образом обеих окружностей и отрезка PQ, лежит на общей хорде окружностей ω_1 и ω_2.

б) Найти радиус окружности ω.

17. *Анна Малкова* 1 марта 2001 года Антон открыл в банке счет под 5% годовых, с условием начисления процентов в конце каждого года, и внес на этот счет 100 тысяч рублей.

Антон решил, что каждый год сумма на его счете должна увеличиваться на одну и ту же величину по сравнению с предыдущим годом, и неуклонно следовал этому правилу, причем в некоторые годы он добавлял деньги на счет после начисления процентов, а в некоторые – снимал со счета после начисления процентов.

В марте 2021 года перед очередным начислением процентов на счете Антона было ровно 300 тысяч рублей. Обозначим S_1 – сумму, которую он за все эти годы дополнительно внес на счет, а S_2 – сумму, которую он за все эти годы снял со счета. Найдите разницу между S_1 и S_2.

18. *Анна Малкова* При каких значениях параметра b уравнение

$$x - 1 = (arcsin\, x + b)^2$$

имеет решения?

19. В группе поровну юношей и девушек. Юноши отправляли электронные письма девушкам. Каждый юноша отправил или 4 письма, или 21 письмо, причём и тех и других юношей было не менее двух. Возможно, что какой-то юноша отправил какой-то девушке несколько писем.

а) Могло ли оказаться так, что каждая девушка получила ровно 7 писем?
б) Какое наименьшее количество девушек могло быть в группе, если известно, что все они получили писем поровну?
в) Пусть все девушки получили разное количество писем (возможно, какая-то девушка не получила писем вообще). Какое наибольшее количество девушек в такой группе?