Карта ловушек на ЕГЭ по Профильной математике. Часть 1

Привет, друг!

Мы решили составить карту ловушек. Самых коварных задач ЕГЭ.

Большую часть из них мы разобрали на Марафоне «Скорая помощь».

За день до ЕГЭ не забудь еще раз посмотреть на эту карту.

А если хочешь что-нибудь к ней добавить – напиши Анне Малковой на почту: online@ege-study.ru

1. **Видишь в уравнении квадратный корень – будь особенно внимателен!**

Решите уравнение $\sqrt{72-x}=x$. *Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.*

Решение:

Выражение под корнем должно быть неотрицательно. И сам корень – величина неотрицательная. Значит, и правая часть должна быть больше или равна нуля. Следовательно, уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 72-x=x^2 \\ 72-x\geq 0 \\ x\geq 0 \end{cases}$$

Решение таких уравнений лучше всего записывать в виде цепочки равносильных переходов:

$$\sqrt{72-x}=x \;<=>\; \begin{cases} 72-x=x^2 \\ 72-x\geq 0 \\ x\geq 0 \end{cases} \;<=>\; \begin{cases} x^2+x-72=0 \\ x\leq 72 \\ x\geq 0 \end{cases} \;<=>\; \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=8 \\ x=-9 \end{array} \right. \\ x\leq 72 \\ x\geq 0 \end{cases} \;<=>\; x=8$$

Мы получили, что $x=8$. Это единственный корень уравнения.

2. **Преобразование выражений с модулями.**

Вычислите $|x-9|+|x-4|$ *при* $5<x<8$.

Решение:

В этом выражении два знака модуля. Раскроем каждый из них по определению:

$|x-9| = \begin{cases} x-9, \text{если } x-9 \geq 0 \\ 9-x, \text{если } x-9 < 0 \end{cases};$

$|x-4| = \begin{cases} x-4, \text{если } x-4 \geq 0 \\ 4-x, \text{если } x-4 < 0 \end{cases}.$

По условию, $5 < x < 8$. Значит, $x - 9 < 0$, и первый модуль раскрывается с противоположным знаком (с «минусом»), а $x - 4 > 0$ - и второй модуль раскрывается с «плюсом».

Получим: $|x-9| + |x-4| = 9 - x + x - 4 = 5.$

3. **Проверь себя: что принимаем за 100%?**

Розничная цена учебника 180 рублей, она на 20% выше оптовой цены. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по оптовой цене на 10 000 рублей?

Решение:

За 100% принимаем ту величину, с которой мы сравниваем.
В нашем случае за 100% принимаем x – оптовую цену учебника.

Поскольку розничная цена учебника на 20% выше оптовой, получим, что 1,2 x = 180 и x = 150 рублей. Поделим 10000 на 150.

$\frac{10000}{150} = \frac{1000}{15} = \frac{200}{3} = 66\frac{2}{3}$. Очевидно, округляем до меньшего.

Ответ: 66.

4. **Знаменитая задача про рельс. «Удлинение рельса на 3 мм» означает, что его длина увеличилась на 3 мм. А вовсе не стала равной 3 мм!**

При температуре $0^\circ C$ рельс имеет длину l_0=10 м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t) = l_0(1 + \alpha \cdot t)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ — коэффициент теплового расширения, t — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Если вдруг у тебя получилось, что рельс удлинится на 3 миллиметра при температуре 7000 градусов – то этого быть не может. Потому что 7000 градусов - это больше, чем температура на поверхности Солнца! Рельс расплавится.

Решение:

Зависимость $l(t) = l_0(1 + \alpha \cdot t)$ - это функция длины рельса от температуры. Длина рельса зависит от температуры, согласно данной в условии формулу. Подставим в эту формулу начальные значения:

l_0=10 м и $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$.

Рельс удлинился на 3 мм, то есть в какой-то момент его длина стала на 3 мм больше. Значит, при определенной температуре длина рельса $l(t)$ стала равной 10 м + 3 мм.

Теперь переведем миллиметры в метры. Один миллиметр — это одна тысячная часть метра ($1\text{мм} = 0{,}001\text{м} = 10^{-3}$ метра).

$$l(t) = 10 + 3 \cdot 10^{-3} \text{ (м)}$$

Получим:

$$10 + 3 \cdot 10^{-3} = 10(1 + 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot t)$$

Это линейное уравнение с одной переменной *t*. Раскроем скобки в правой части

$$10 + 3 \cdot 10^{-3} = 10 + 12 \cdot 10^{-5} \cdot t$$

Находим *t*:

$$t = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{12 \cdot 10^{-5}} = \frac{1}{4} \cdot 10^2 = \frac{100}{4} = 25.$$

При температуре 25 градусов Цельсия рельс удлинится на 3 мм.

Ответ: 25

5. **Еще одна знаменитая задача: как сжечь прибор.**

Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур определяется выражением $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1400$ К, $a = -10$ К/мин, $b = 200$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1760 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор. Ответ выразите в минутах.

Решение:

По условию, зависимость температуры нагревательного элемента от времени определяется формулой:

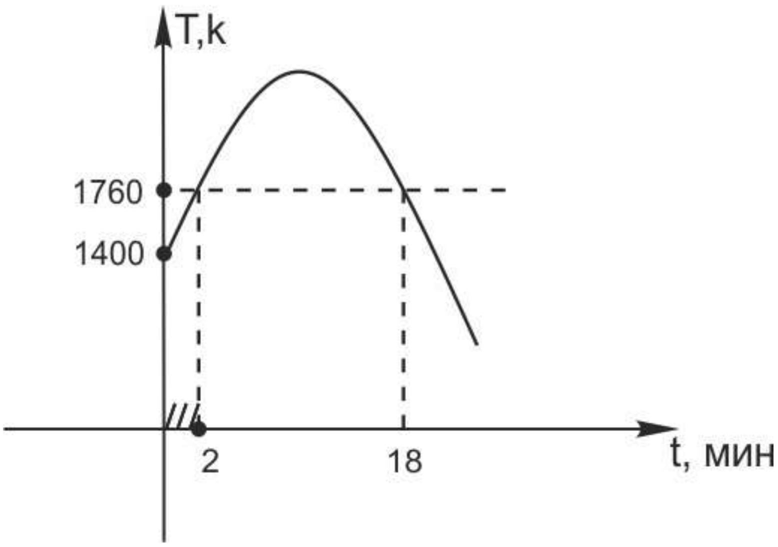
$$T(t) = 1400 + 200t - 10t^2.$$

В нормальном режиме работы прибора должно выполняться неравенство $T \leq 1760$, или

$$1400 + 200t - 10t^2 \leq 1760.$$

Нарисуем график зависимости температуры нагревателя от времени:

$T(t) = 1400 + 200t - 10t^2$. Это квадратичная парабола с ветвями вниз.



Мы включаем прибор в момент времени $t = 0$. Температура нагревателя повышается и в момент времени t_1 достигает 1760 К. Если в этот момент прибор не выключить, температура продолжает повышаться. Но это значит, что прибор испортится, то есть сгорит!

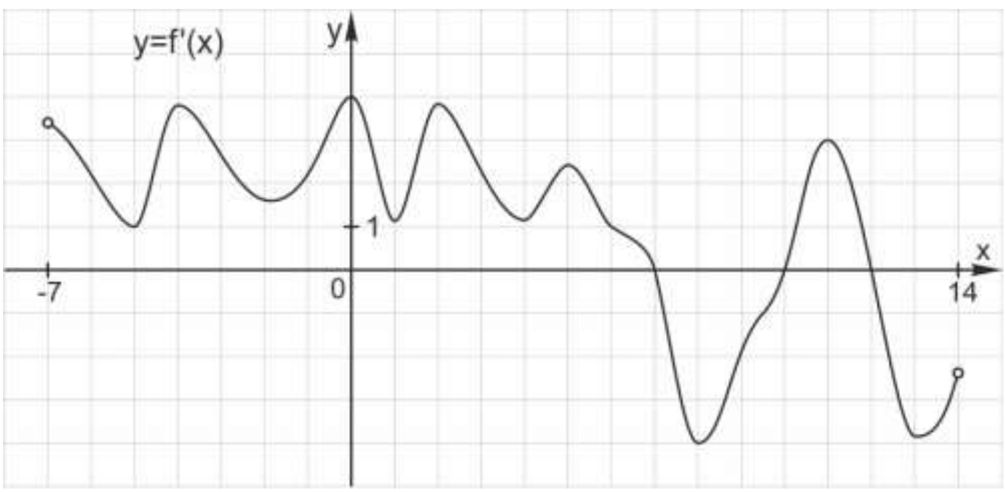
Ясно, что отключать прибор надо в момент времени t_1.
Осталось найти t_1. Решим квадратичное неравенство: $-t^2 + 20t - 36 \leq 0$.
Корни соответствующего квадратного уравнения: $t_1 = 2$, $t_2 = 18$

Мы нашли, что $t_1 = 2$.

Ответ: 2.

6. **Производная. Помним, что функция и ее производная – это не одно и то же. Начинаем с вопроса: что нарисовано?**

   На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на интервале (-7; 14). Найдите количество точек максимума функции f(x) на отрезке [-6; 9].



Решение:

Очень внимательно читаем условие задачи. Изображен график производной, а спрашивают о точках максимума функции. В точке максимума производная равна нулю и меняет знак с «плюса» на «минус». На отрезке [-6; 9] такая точка всего одна! Это x=7.

А вот эти все «горки», которые вы старательно пытаетесь посчитать, - это точки максимума производной, и о них вас спросят не сейчас, а на первом курсе.

Ответ: 1.

7. **Снова производная. Запомни: точка минимума функции и наименьшее значение функции на отрезке – это не одно и то же!**

Найдите наименьшее значение функции $y = 4x^2 - 10x + 2lnx - 5$ *на отрезке* $[0{,}3;\ 3]$.

Решение:

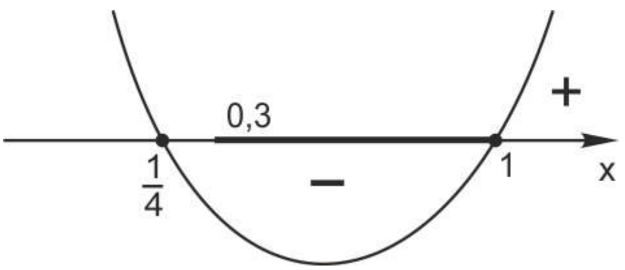
Найдем производную функции $y = 4x^2 - 10x + 2lnx - 5$

и приравняем ее к нулю.

$y'(x) = 8x - 10 + \frac{2}{x};$

$y\,'(x) \ = \ 0$ при $x_1 = 1,\ \ x_2 = \frac{1}{4}.$

Найдем знаки производной.



Точка $x_1 = 1$ - точка минимума функции $y(x)$. Точка $x_2 = \frac{1}{4}$ не лежит на отрезке $[0{,}3;\ 1]$. Поэтому

$y(0{,}3) > \ y(1)$ и $y(3) > \ y(1)$. Значит, наименьшее значение функции на отрезке $[0{,}3;\ 1]$ достигается при x=1. Найдем это значение.

$y_{min}(x) = y(1) = 4 - 10 - 5 = -11$

Ответ: -11.

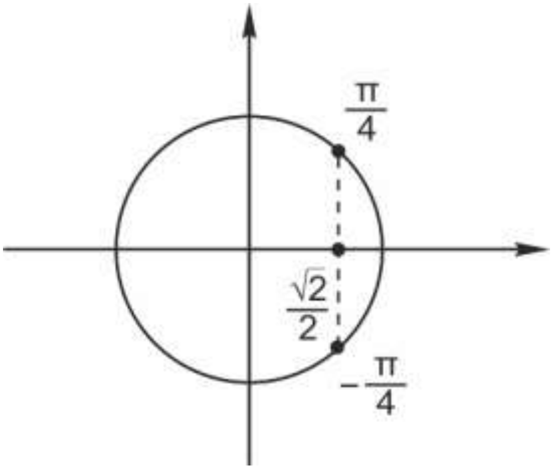
8. **В задании 1 (Уравнение) вам может встретиться настоящее тригонометрическое уравнение, как в задаче 12. С отбором корней.**

   Найдите корень уравнения: $cos\frac{\pi(x+1)}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. *В ответе запишите наибольший отрицательный корень.*

Решение:

Типичная ошибка – решать это уравнение в уме. Мы не будем так делать! Несмотря на то, что это задание включено в первую части варианта ЕГЭ, оно является настоящим тригонометрическим уравнением, причем с отбором решений.

Сделаем замену $\frac{\pi(x+1)}{4} = t$. Получим: $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Получаем решения: $t = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$. Вернемся к переменной x.

$\frac{\pi(x+1)}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$. Поделим обе части уравнения на π и умножим на 4.

$$x + 1 = \pm 1 + 8n, n \in Z$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 8n, n \in Z \\ x = -2 + 8n. \end{array}\right.$$

Первой серии принадлежат решения -8; 0; 8…

Вторая серия включает решения -2; 6; 14…

Наибольший отрицательный корень – тот из отрицательных, который ближе всех к нулю.

Это x = -2.

Ответ: -2.

9. **Теория вероятностей, задача про кофе. Это единственная задача в Банке заданий, где события являются зависимыми.**

   В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Вероятность того, что кофе закончился, равна 0,3 и для одного, и для другого автомата.

Составим таблицу для вероятностей событий «Кофе остался» и «Кофе закончился» для каждого автомата.

	Кофе остался	Кофе закончился
Первый автомат	0,7	0,3
Второй автомат	0,7	0,3

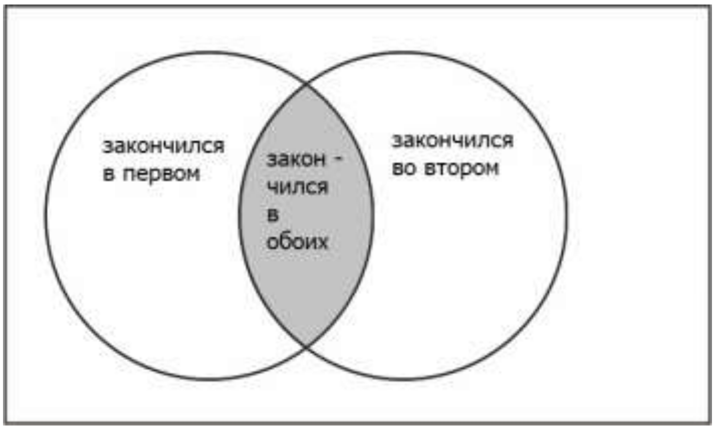
По условию задачи, вероятность того, что кофе закончился в обоих автоматах, равна 0,12. И это не 0,3 * 0.3 = 0,09, как мы могли бы предположить.

Это противоречие? – Нет, все в порядке, условие корректно. Вероятность наступления двух событий сразу – «кофе закончился в 1-м автомате» и «кофе закончился во 2-м автомате» не равна произведению вероятностей. Значит, эти события зависимы.

И действительно, одно из них влияет на другое. Если в торговом центре в одном из автоматов больше нет кофе, то во втором автомате он закончится быстрее, потому что к нему пойдут все, кто хочет выпить кофе.

Кроме того, события «кофе закончился в 1-м автомате» и «кофе закончился во 2-м автомате» совместны, то есть возможно наступление и того, и другого события.

Нарисуем диаграмму.



Левый круг соответствует событию «кофе закончился в 1-м автомате». Правый - «кофе закончился во 2-м автомате». Пересечение кругов – событию «кофе закончился в обоих».

Найдем вероятность события «кофе закончился хотя бы в одном из автоматов» (в первом, во втором ли в обоих). Вот как это сделать.

Предположим, что мы хотим посчитать площадь фигуры на рисунке. Как бы мы поступили? - Мы бы сложили площадь первого круга и площадь второго, а затем вычли площадь их пересечения, поскольку она посчитана дважды.

По тому же принципу мы считаем вероятность того, что кофе закончится хотя бы в одном автомате:

$P1 = 0{,}3 + 0{,}3 - 0{,}12 = 0{,}48$

Мы сложили вероятности событий «кофе закончился в 1-м автомате» и «кофе закончился во 2-м автомате». И вычли вероятность события «кофе закончился в обоих», потому что она посчитана дважды.

Чему же равна вероятность события «кофе остался в обоих автоматах»? Очевидно, что кофе может либо остаться в обоих автоматах, либо закончиться хотя бы одном. Говорят, что вместе эти события образуют полную группу событий и сумма их вероятностей равна единице.

Вероятность того, что кофе останется в обоих автоматах

$P2 = 1 - P1 = 1 - 0{,}48 = 0{,}52$.

Ответ: 0,52.