Марафон «Скорая помощь перед ЕГЭ по математике». Задания 12, 14, 15 ЕГЭ.

Образцы оформления решений

Уравнения, задача 12

1. а) Решите уравнение $\cos x + \sqrt{3}\sin(\frac{3\pi}{2} - \frac{x}{2}) + 1 = 0$

   б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение:

а) По формуле приведения,

$$sin(\frac{3\pi}{2} - \frac{x}{2}) = -cos\frac{x}{2}$$

По формуле косинуса двойного угла: $cos\,2\alpha = 2cos^2\alpha - 1$.

Получим:

$$2\,cos^2\frac{x}{2} - 1 - \sqrt{3}\,cos\frac{x}{2} + 1 = 0$$

$$2\,cos^2\frac{x}{2} - \sqrt{3}\,cos\frac{x}{2} = 0$$

Разложим левую часть уравнения на множители:

$$cos\frac{x}{2}\,(2cos\frac{x}{2} - \sqrt{3}) = 0$$

Произведение двух (или нескольких) множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из них равен нулю.

Значит,

$cos\frac{x}{2} = 0$ или $cos\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Решения первого уравнения:

$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in z$; $x = \pi + 2\pi k, k \in Z$

Решения второго уравнения:

$$\left[\begin{array}{l}\frac{x}{2}=\frac{\pi}{6}+2\pi k, \mathrm{k}\in Z \\ \quad \frac{x}{2}=-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\end{array}\right. ;$$

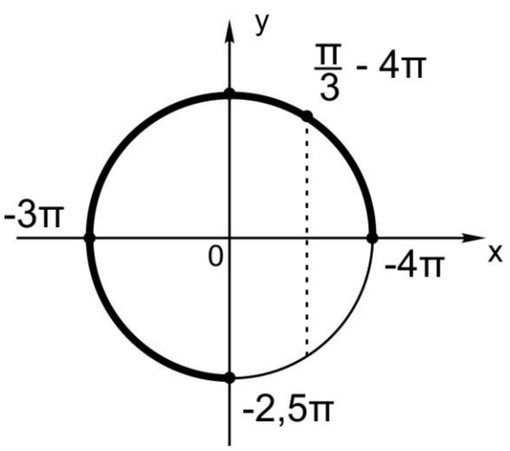
$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+4\pi k, \mathrm{k}\in \mathrm{Z} \\ \quad x=-\frac{\pi}{3}+4\pi k\end{array}\right.$$

Объединим серии решений.

Ответ в пункте а):

$$\left[\begin{array}{l}\mathrm{x}=\pi+2\pi \mathrm{k}, \mathrm{k}\in \mathrm{z} \\ \quad \mathrm{x}=\pm\frac{\pi}{3}+4\pi \mathrm{k}.\end{array}\right.$$

б) Отметим на тригонометрическом круге отрезок $\left[-4\pi;\ -5\frac{\pi}{2}\right]$ и найденные серии решений. Видим, что указанному отрезку принадлежат точки
$x_1=-3\pi,\ x_2=-\frac{11\pi}{3}$.



Ответ в пункте б):
$x_1=-3\pi$,

$x_2=-\frac{11\pi}{3}$.

2. а) Решите уравнение $\left(27^{\cos x}\right)^{\sin x}=3^{\frac{3\cos x}{2}}$
   б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение:

а) $3^{3\cos x\sin x}=3^{\frac{3\cos x}{2}}$

Степени равны, их основания равны. Значит, равны и показатели.

$$3\cos x \sin x = \frac{3\cos x}{2}$$

$$2\cos x \sin x - \cos x = 0$$

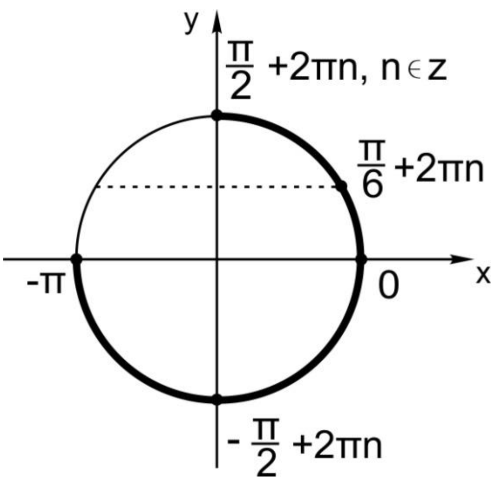
$$\cos x\,(\sin x - \frac{1}{2}) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \sin x = \frac{1}{2}\end{array}\right. <=> \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in z\\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n.\end{array}\right.$$

Это ответ в пункте (а).

б) Отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

Отметим на тригонометрическом круге отрезок $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ и найденные серии решений.



Видим, что указанному отрезку принадлежат точки $x = -\frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{\pi}{2}$ из серии $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, n ∈ z.

Точки серии $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, n ∈ z не входят в указанный отрезок.

Из серии $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in z$ в указанный отрезок входит точка $x = \frac{\pi}{6}$.

Ответ в пункте (б): $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$.

3. а) Решите уравнение $2\log_3{}^2(2\cos x) - 5\log_3(2\cos x) + 2 = 0$.

   б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение:

Сделаем замену $t = \log_3(2\cos x)$.

Получим квадратное уравнение

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

Корни уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} t = 2, \\ t = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Если $t = 2$, то $\log_3(2\cos x) = 2$;

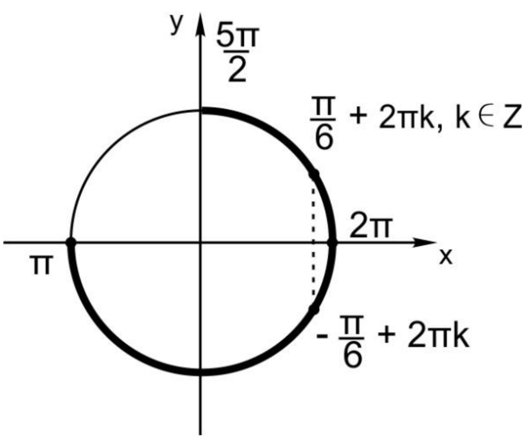
$2\cos x = 9$; $\cos x = \frac{9}{2}$ – нет решений, т. к. $|\cos x| \le 1$.

Если $t = \frac{1}{2}$, то $\log_3(2\cos x) = \frac{1}{2}$;

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; тогда

$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in z$.

б) Отметим на тригонометрическом круге отрезок $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ и найденные серии решений.



Видим, что указанному отрезку принадлежат точки: $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$; $x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

Ответ: а) $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in z$

б) $\frac{13\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

4. а) Решите уравнение $(tg^2 x - 3)\sqrt{11\cos x} = 0$.

   б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Решение:

ОДЗ:

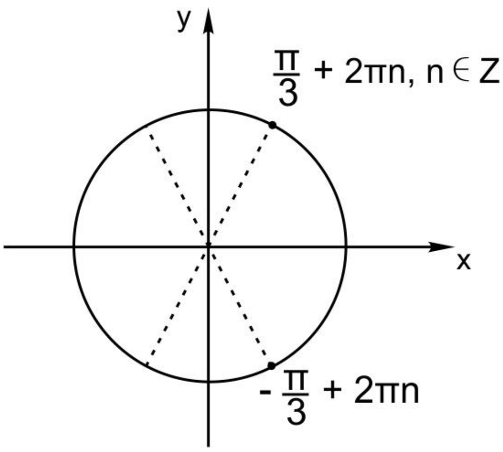
$$\begin{cases}\cos x \geq 0\\ \cos x \neq 0\end{cases} => \cos x > 0.$$

Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l} tg^2 x - 3 = 0\\ \cos x = 0\end{array}\right.\\ \cos x > 0\end{cases} <=> \begin{cases} tg^2 x - 3 = 0\\ \cos x > 0\end{cases} <=> \begin{cases}\left[\begin{array}{l} tgx = \sqrt{3}\\ tgx = -\sqrt{3}\end{array}\right.\\ \cos x > 0\end{cases} <=>$$

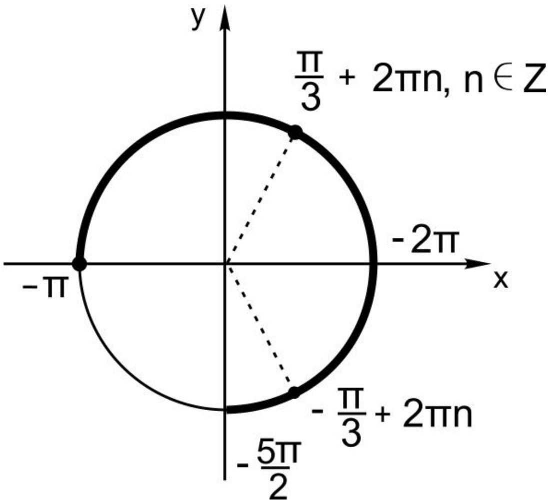
$$<=> \begin{cases}\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + \pi n, n \in z\\ x = -\dfrac{\pi}{3} + \pi n\end{array}\right.\\ \cos x > 0\end{cases}$$

Отберем решения с помощью тригонометрического круга. Нам нужны те серии решений, для которых $\cos x > 0$, то есть те, что соответствуют точкам справа от оси Y.



Ответ в пункте а) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in z$

б) Отметим на тригонометрическом круге найденные серии решений и отрезок $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.



Видим, что указанному промежутку принадлежат точки

$x = \frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3}$ и $x = -\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{7\pi}{3}$.

Неравенства, задача 14

5.

$$\left(\frac{1}{x^2 - 7x + 12} + \frac{x - 4}{3 - x}\right)\sqrt{6x - x^2} \leq 0.$$

Решение:

Выражение под корнем неотрицательно. Это область допустимых значений неравенства.

Произведение двух множителей равно меньше либо равно нуля тогда и только тогда, когда хотя бы один из них равен нулю или когда множители имеют разные знаки.

Корень квадратный не может быть отрицательным, он может быть только равен нулю. И если он равен нулю – знак первого множителя (в скобках) уже не важен. И значит, неравенство равносильно системе:

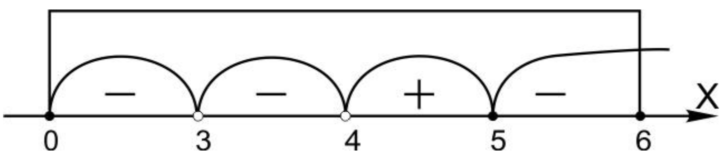
$$\begin{cases} 6x - x^2 \geq 0 \text{ (ОДЗ)} \\ \left[\begin{array}{l} 6x - x^2 = 0 \\ \frac{1}{x^2 - 7x + 12} + \frac{x - 4}{3 - x} \leq 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$<=>\begin{cases} x(6-x)\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=6 \\ \dfrac{1}{(x-3)(x-4)}-\dfrac{x-4}{x-3}\leq 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$<=>\begin{cases} 0\leq x\leq 6 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=6 \\ \dfrac{1-(x-4)^2}{(x-3)(x-4)}\leq 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$<=>\begin{cases} 0\leq x\leq 6 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=6 \\ \dfrac{(1-x+4)(1+x-4)}{(x-3)(x-4)}\leq 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$<=>\begin{cases} 0\leq x\leq 6 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=6 \\ \dfrac{(5-x)(x-3)}{(x-3)(x-4)}\leq 0 \end{array}\right. \end{cases}$$



Ответ: $[0;3)\cup(3;4)\cup[5;6]$.

6. Решите неравенство:
$$\frac{2}{7^x-7}\geq\frac{5}{7^x-4}$$

Решение:

Сделаем замену переменной:

$7^x=t,\qquad t>0.$

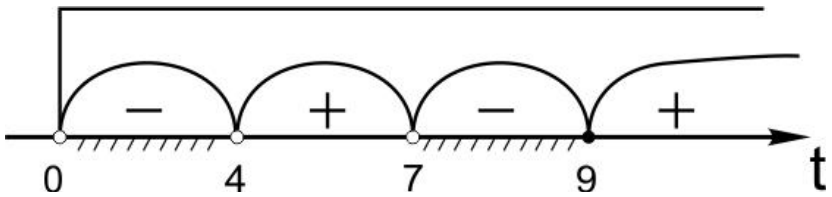
$$\frac{2}{t-7}-\frac{5}{t-4}\geq 0$$

$$\frac{2t-8-5t+35}{(t-7)(t-4)}\geq 0$$

$$\frac{27-3t}{(t-7)(t-4)}\geq 0$$

$$\frac{t-9}{(t-7)(t-4)}\leq 0$$

Обратите внимание, что возвращаться к переменной x еще рано. Сначала решим неравенство с переменой t методом интервалов:



Поскольку $t > 0$, получим:

$$\left[\begin{array}{l} t < 4 \\ 7 < t \leq 9 \end{array}\right.$$

Тогда

$$\left[\begin{array}{l} 7^x < 4 \\ 7 < 7^x \leq 9 \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} 7^x < 7^{\log_7 4} \\ 7^1 < 7^x \leq 7^{\log_7 9} \end{array}\right.;$$

Показательная функция $y = 7^x$ монотонно возрастает, поэтому, если $7^{x1} < 7^{x2}$, то $x_1 < x_2$.

$$\left[\begin{array}{l} x < \log_7 4 \\ 1 < x \leq \log_7 9 \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (-\infty;\ \log_7 4) \cup (1;\ \log_7 9]$.

7. Решите неравенство:
   $\log^2{}_2 x + 5\log_2 x + 6 > 0$

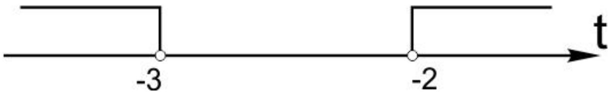
Решение:

ОДЗ: $x > 0$

Замена: $\log_2 x = t$;

$t^2 + 5t + 6 > 0$

$(t + 2)(t + 3) > 0;$



$$\left[\begin{array}{l}\log_2 x < -3\\ \log_2 x > -2\end{array}\right. <=> \left[\begin{array}{l}\log_2 x < \log_2 \frac{1}{8}\\ \log_2 x > \log_2 \frac{1}{4}\end{array}\right. <=> \left\{\begin{array}{l} x > 0\\ \left[\begin{array}{l} x < \frac{1}{8}\\ x > \frac{1}{4}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Мы воспользовались тем, что функция $y = \log_2 x$ монотонно возрастает, поэтому, если$\log_2 x1 < \log_2 x2$, то x1 < x2 при положительных x1 и x2.

Ответ: $x \in (0; \frac{1}{8}) \cup (\frac{1}{4}; +\infty)$

8. $\log_{3-x} \frac{x+4}{(x-3)^2} \geq -2$

$$\log_{3-x} \frac{x+4}{(x-3)^2} \geq -2 \ <=> \left\{\begin{array}{c} 3 - x > 0\\ 3 - x \neq 1\\ \frac{x+4}{(x-3)^2} > 0\\ \log_{3-x} \frac{x+4}{(x-3)^2} + 2 \geq 0\end{array}\right.$$

Применим формулу логарифма частного, учитывая, что $(a-b)^2 = (b-a)^2$. Используем также условия $3 - x > 0$; $x + 4 > 0$.

$$\left\{\begin{array}{c} x < 3\\ x \neq 2\\ x + 4 > 0\\ \log_{3-x}(x+4) - \log_{3-x}(3-x)^2 + 2 \geq 0\end{array}\right.$$

$$<=> \left\{\begin{array}{c} x < 3\\ x \neq 2\\ x > -4\\ \log_{3-x}(x+4) \geq 0\end{array}\right.$$

Поскольку $3 - x > 0$, $\log_{3-x}(3-x)^2 = 2\log_{3-x}|3-x| = 2\log_{3-x}(3-x) = 2.$

Согласно методу замены множителя, выражение $\log_{3-x}(x+4)$ заменим на $(3 - x - 1)(x + 4 - 1)$.
Получим систему:

$$\left\{\begin{array}{c} x \neq 2\\ -4 < x < 3\\ (2-x)(x+3) \geq 0\end{array}\right.$$

Решим последнее неравенство методом интервалов. С учетом остальных двух условий системы получим ответ.

Ответ: $x \in [-3; 2)$.

«Экономические» задачи, №15 ЕГЭ

9. 31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 9 930 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа (в рублях), чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

Решение:

Введем обозначения.

$S = 9930000$ рублей;

$P = 10\%;\ k = 1 + \frac{p}{100} = 1{,}1.$

X – сумма ежегодного платежа;

Схема погашения кредита:

$$Sk^3 - X(k^2 + k + 1) = 0;$$

$$X = \frac{S \cdot k^3}{k^2 + k + 1} = \frac{S \cdot k^3(k-1)}{k^3 - 1}$$

Применили формулу разности кубов: $k^3 - 1 = (k-1)(k^2 + k + 1)$.

Расчеты удобно вести в тысячах рублей.

$X = \frac{9330 \cdot 1{,}331 \cdot 0{,}1}{0{,}331} = \frac{933000 \cdot 1{,}331}{331} = 3000 \cdot 1{,}331 = 3{,}993$ тыс. рублей $= 3993000$ рублей.

Ответ: 3993000

10. В июле 2016 года планируется взять кредит в размере 6,6 млн. руб. Условия возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года.

— с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга.

— в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остается равным 6,6 млн. руб.

— суммы выплат 2020 и 2021 годов равны.

Найдите r, если в 2021 году долг будет выплачен полностью и общие выплаты составят 12,6 млн. рублей.

Решение:

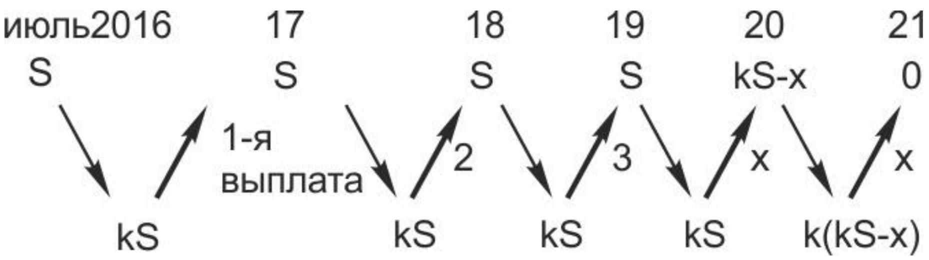
$S = 6{,}6$ млн. руб

Z=12, 6 млн. руб

$k = 1 + \frac{r}{100}$

X – ежегодные выплаты 2020 и 2021 годов.

Составим схему погашения кредита:



$Z = 3(kS - S) + 2X = 3S(k - 1) + 2X$

$(kS - X) \cdot k - X = 0$

$k^2 S - X(k + 1) = 0$

$X = \frac{k^2 S}{k+1}$

$$\begin{cases} Z = 3S(k - 1) + 2\frac{k^2 S}{k+1} \\ X = \frac{k^2 S}{k+1} \end{cases}$$

$12{,}6 = 3 \cdot 6{,}6(k-1) + \frac{2 \cdot k^2 \cdot 6{,}6}{k+1}$

$126 = 3 \cdot 66(k-1) + \frac{2 \cdot k^2 \cdot 66}{k+1}$

$42 = 66(k-1) + \frac{44k^2}{k+1}$

$21(k+1) = 33(k^2-1) + 22k^2$

$21k + 21 = 33k^2 - 33 + 22k^2$

$55k^2 - 21k - 54 = 0$

$D = 21^2 - 4 \cdot 55 \cdot (-54) = 12321 = 111^2$, $\Longrightarrow k = \frac{132}{110} = \frac{12}{10} = \frac{120}{100} \Longrightarrow r = 20\%$

Ответ: 20

11. 15-го декабря планируется взять кредит в банке на 26 месяцев. Условия возврата таковы:
    — 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
    — со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
    — 15-го числа каждого месяца с 1-го по 25-й долг должен быть на 20 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
    — к 15-му числу 26-го месяца кредит должен быть полностью погашен.
    Какой долг будет 15-го числа 25-го месяца, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1407 тысяч рублей?
    Ответ выразите в тысячах рублей.

Решение:

Введем обозначения. Для удобства ведем расчеты в тысячах рублей.

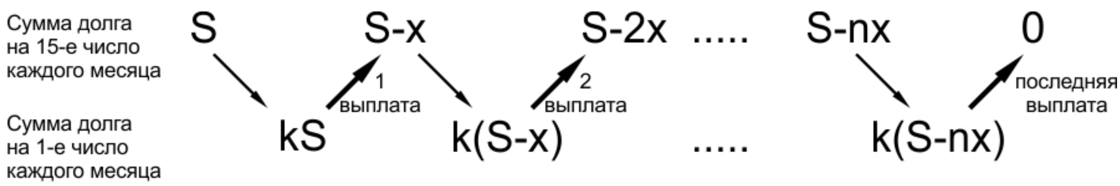
S – сумма кредита,

X = 20 (тыс. рублей) – величина, на которую уменьшается сумма долга

Z = 1407 (тыс. рублей) – общая сумма выплат,

k = 1 + 0,03 = 1,03

Рисуем схему погашения кредита.



Первая выплата: kS – (S – X).

Вторая выплата: $k(S - X) - (S - 2X)$.

…

Последняя выплата: $k(S - nX)$.

Общая сумма выплат Z:

$$Z = kS - (S - X) + k(S - X) - (S - 2X) + \ldots + k(S - 25X) =$$
$$= k(S + S - X + S - 2X + \ldots + S - 25X) - (S - X + S - 2X + \ldots + S - 25X) =$$
$$= k(26S - X(1 + 2 + 3 + \ldots + 25)) - (25S - X(1 + 2 + 3 + \ldots + 25)) =$$
$$= k(26S - 325X) - 25S + 325k = S(26k - 25) - 325X(k-1).$$

Мы использовали формулу для суммы арифметической прогрессии:

$1 + 2 + 3\ldots + 25 = 325$.

По условию, $Z = 1407$ (тыс. рублей).

Мы находим величину долга на 15-е число 25-го месяца, то есть $S - nX = S - 25*20 = S - 500$.

$Z = S(26k - 25) - 325X(k-1)$.

$1407 = S(26*1{,}03 - 25) - 325 * 20 * 0{,}03$

$S = 900$ тыс. рублей

Тогда $S - 500 = 400$ тысяч рублей, ответ запишем в тысячах рублей.

Ответ: 400

12. Цена за единицу товара зависит от объема заказа и определяется следующим образом.

    1) Если объем заказа не превышает 4000 единиц товара, то цена единицы товара равна 300 рублей.

    2) Если объем заказа превышает 4000 единиц товара, то на каждую единицу товара от цены 300 рублей предоставляется скидка в размере $\frac{x-4000}{50}$ рублей, где x - количество единиц товара в заказе.
    При каком объёме заказа фирма, продающая товар, получит наибольшую выручку? (Объём заказа не может превышать 16 000 единиц товара.)

Решение:

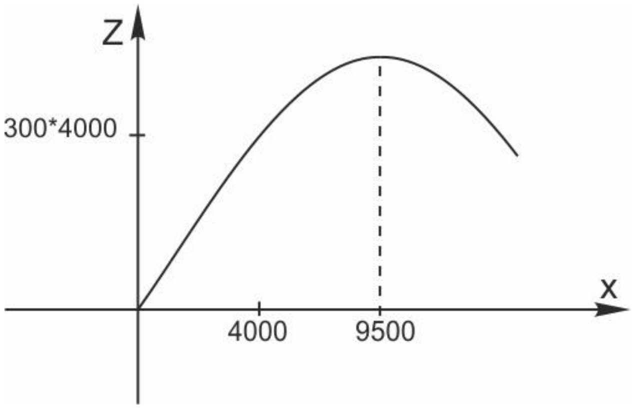
Пусть x - объем заказа, p - цена.

Если $x \leq 4000$, $p = 300$, выручка $z = 300x$
Если $x > 4000$, $p = 300 - \frac{x-4000}{50}$, выручка $z = 300x - x\left(\frac{x-4000}{50}\right)$

Рассмотрим функцию $z(x)$

Если $x \leq 4000$, $z(x) = 300x$
Если $x > 4000$, $z(x) = 300x - \frac{x^2}{50} + 80x = 380x - \frac{x^2}{50}$;

График функции z(x) показан на рисунке.



Наибольшее значение функции достигается в вершине параболы. Найдем координату вершины параболы – точку x_0.

$$x_0 = \frac{380 \cdot 50}{2} = 380 \cdot 25;$$

$x_0 = 9500.$

Наибольшая выручка: при $x = 9500$.

Ответ: 9500