Анна Малкова

ЕГЭ-2024 по математике:

с нуля до сложных задач

ЕГЭ-СТУДИЯ

Готовим на 80 и выше!

ЕГЭ-2024 по математике: с нуля до сложных задач

Анна Малкова

Для тех, у кого не получается.

Для тех, кто не понял ключевые моменты и поэтому не может идти дальше.

Для родителей, помогающим детям готовиться к ЕГЭ.

Для учителей и репетиторов.

Дорогие друзья!

Вы знаете, что ЕГЭ по математике Профильного уровня будет не таким, как раньше. Он меняется, и перемены коснутся тех, кто сдает ЕГЭ в 2024 году.

Эта книга поможет вам подготовиться к ЕГЭ независимо от этих изменений. В ней есть и главы, относящиеся к старой версии ЕГЭ, и новые темы: теория вероятностей углубленного уровня, функции и графики и даже комплексные числа.

Особое внимание уделяется темам, вызывающим сложности практически у каждого школьника: проценты, текстовые задачи, решение уравнений и систем, геометрия и стереометрия, быстрый счет без калькулятора, а также корни, степени, логарифмы, тригонометрия, функции и производные. Все они являются фундаментом для изучения математики и успешной сдачи ЕГЭ.

Первые главы покажутся вам очень подробными и простыми – специально для тех, кто перестал понимать математику или никогда ее не понимал. Следующие темы – более сложные, но при этом язык книги остается простым.

Эту книгу написала для вас Анна Малкова,

преподаватель с опытом работы более 30 лет,

автор и ведущая Онлайн-курса подготовки к ЕГЭ по математике на 100 баллов, руководитель компании «ЕГЭ-Студия»,

автор 6 учебников для подготовки к ЕГЭ по математике.

Сайт моей компании «ЕГЭ-Студия»: https://ege-study.ru/

Онлайн-курс подготовки на 100 баллов

Онлайн-курс для учителей и репетиторов математики

Канал на YouTube

Книги Анны Малковой:

Математика. Авторский курс подготовки к ЕГЭ.

ЕГЭ. Математика. Задачи высокой и повышенной сложности.

ЕГЭ. Математика. Секретные приемы репетитора.
Справочник для подготовки к ЕГЭ по математике

Умный сборник авторских задач для подготовки к ЕГЭ по математике.

Задачи с параметрами. 12 методов решения.

Содержание

Глава 1. Дроби, проценты, пропорции и способности к математике

Хотите хорошо сдать ЕГЭ? Вам поможет эта книга. По ней вы подготовитесь к экзамену с любого уровня, даже с нуля. Даже если у вас нет «математических способностей».

Знаете ли вы, что в любом деле есть секреты, владея которыми можно легко, быстро и качественно сделать задуманное?

Вот о таких ключевых моментах в подготовке и сдаче ЕГЭ и пойдет речь в книге. Я расскажу, ЧТО делать и в каком порядке. Поделюсь репетиторскими секретами, собранными за 25 лет работы с абитуриентами.

Мы разберем темы, которые кажутся вам сложными - начиная с дробей и процентов и заканчивая производными и комплексными числами.

Вы научитесь решать задачи без ошибок, считать без калькулятора, а ещё узнаете, как сделать школьную учительницу своим помощником.

Знаете ли вы, что есть только два препятствия в обучении? Вот они: «У меня ничего не получится» и «Ну, я все это знаю».

Любой опытный репетитор скажет, что первое из них намного проще преодолеть! Уверенность появляется и растет с количеством решенных задач. А вот второе убеждение мешает и троечникам, и отличникам. Оно ограничивает, не дает расти. Между «Ну, я все знаю» и «Я отлично сдал ЕГЭ!» - колоссальная разница!

Убедитесь, что у вас всё получается. Все задачи, предложенные в книге, решайте самостоятельно, без калькулятора, и сверяйте с ответом. Дело в том, что именно в простых задачах обычно возникают досадные ошибки. Помните, что в части 1 Профильного ЕГЭ не бывает «почти правильного» ответа, а наша с вами цель - получить на ЕГЭ максимальный балл.

Начнем с простых текстовых задач. Раньше это были первые задачи в вариантах ЕГЭ. Большинство из них - элементарные. Сейчас наша цель - повторить то, что изучали в 7-9 классах, потренироваться решать задачи без ошибок и подготовиться к более сложным темам.

1. Спидометр автомобиля показывает скорость в милях в час. Какую скорость (в милях в час) показывает спидометр, если автомобиль движется со скоростью 36 км в час? (Считайте, что 1 миля равна 1,6 км.)

Запишем кратко условие задачи:

1 миля – 1,6 км

x миль – 36 км (это расстояние, которое автомобиль проезжает за час).

Во сколько раз x миль больше, чем 1 миля? Очевидно, во столько же раз, во сколько 36 км больше, чем 1,6 км. Значит,

$$\frac{x\text{ миль}}{1\text{ миля}} = \frac{36\text{ км}}{1{,}6\text{ км}}$$

$x = 36 : 1{,}6$

$x = 22{,}5.$

2. Павел Иванович купил американский автомобиль, спидометр которого показывает скорость в милях в час. Американская миля равна 1609 м. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 65 миль в час? Ответ округлите до целого числа.

1 миля – 1,609 километров

65 миль (в час) – x километров (в час)

$65 = x : 1,609$

$x = 65 \cdot 1,609$

$x = 104,585$

Округлим результат до целого числа. А как? 104 или 105?

Запомним правило: для того чтобы правильно округлить ответ, смотрим на следующую цифру. Если следующая цифра – от 1 до 4, округляем до меньшего числа (ведь до него ближе). Если от 5 до 9 – в сторону большего.

У нас следующая цифра – пятерка. Значит, округляем в сторону большего числа.

Ответ: 105.

Ответ в первых 12 заданиях Профильного ЕГЭ по математике следует записывать в виде целого числа или десятичной дроби. Давайте вспомним, что такое дроби и какие они бывают. Дело в том, что многие учащиеся, привыкнув считать на калькуляторе, к 11 классу напрочь забывают о таких вещах.

Обыкновенная дробь – это выражение вида $\frac{p}{q}$, где p – целое, а q – натуральное. Число p называется числителем, q – знаменателем.

Если числитель меньше знаменателя, дробь называется правильной. Другими словами, правильная дробь меньше единицы.

Если числитель больше знаменателя, дробь неправильная. Она больше единицы. Такие дроби еще можно записывать в виде смешанных чисел, например, $2\frac{2}{3}$, $9\frac{3}{8}$.

Как перевести смешанное число в неправильную дробь? Например, как записать число $9\frac{3}{8}$ в виде дроби со знаменателем 8?

Это просто. $9\frac{3}{8}$ – это 9 целых и еще $\frac{3}{8}$, то есть $\frac{9}{1} + \frac{3}{8} = 9 \cdot \frac{8}{8} + \frac{3}{8} = \frac{72}{8} + \frac{3}{8} = \frac{75}{8}$.

И наоборот, неправильную дробь всегда можно записать в виде смешанного числа, то есть выделить целую часть.

Например, $\frac{98}{5} = 98 : 5 = \frac{95}{5} + \frac{3}{5} = 19\frac{3}{5}$.

Десятичные дроби – это дроби со знаменателем 10, 100, 1000. . . Чтобы перевести обыкновенную дробь в десятичную, просто разделите (в столбик) числитель на знаменатель. Например,

$$\frac{2}{5} = 2 : 5 = 0,4$$

$$\frac{3}{8} = 3 : 8 = 0,375$$

$$\frac{1}{3} = 0{,}333333\ldots$$

$$\frac{2}{11} = 0{,}181818\ldots$$

А десятичные дроби легко перевести в обыкновенные. Иногда их можно сократить:

$$\frac{3}{10} = 0{,}3$$

$$4{,}6 = 4\frac{6}{10} = \frac{46}{10} = \frac{23}{5}$$

Задачи на проценты традиционно вызывают сложности у выпускников. Давайте вспомним, что

один процент – это одна сотая часть от чего-либо

$$1\% = \frac{1}{100}, \text{ тогда}$$

$$10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0{,}1;$$

$$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4};$$

$$60\% = \frac{60}{100} = \frac{3}{5};$$

$$5\% = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}.$$

А что такое дробь (то есть часть) от числа?

Одна четвертая часть от числа x, или $\frac{1}{4}$ от x, означает, что дробь $\frac{1}{4}$ умножается на число (величину) x.

Например, найти 2% от 60 минут – значит, $\frac{2}{100}$ надо умножить на 60.

Чтобы найти дробь от числа, надо дробь умножить на это число.

3. Запишите в виде обыкновенной и в виде десятичной дроби: 50%, 13%, 45%, 250%.

$$50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$13\% = \frac{13}{100} = 0{,}13$$

$$45\% = \frac{45}{100} = \frac{9}{20} = 0{,}45$$

$$250\% = \frac{250}{100} = \frac{5}{2} = 2{,}5.$$

4. Сколько градусов содержит угол, если он составляет 40% от прямого угла?

Найдем 40% от 90°.

$0{,}4 \cdot 90 = 36.$

Ответ: 36°.

5. Чему равны в минутах 25% часа? 150% часа?

25% часа – это четверть часа, то есть 15 минут.

150% часа – это $\frac{3}{2}$ часа, то есть полтора часа, или 90 минут.

В задачах, да и в жизни, часто говорится об изменении какой-либо величины на определенный процент. Что это значит? Повышение цены на 10% означает, что к прежней цене x прибавили $0{,}1x$. То есть если первоначальная цена равна x, то новая цена составит $x + 0{,}1x = 1{,}1x$. Скидка на 25% означает, что прежняя цена уменьшилась на 25%. И если первоначальная цена была x, то новая цена составит $x - 0{,}25x = 0{,}75x$.

6. Кроссовки стоят 3000 рублей. Сезонная скидка составляет 15 процентов. Сколько вы заплатите за кроссовки с учетом скидки?

$0{,}15 \cdot 3000 = 15 \cdot 30 = 450$ – это сама скидка.

3000 – 450 = 2550 (рублей) – это новая стоимость кроссовок с учетом скидки.

7. Клиент взял в банке кредит 120000 рублей на год под 16%. Какую сумму он должен выплатить в течение года с учетом процентов?

$0{,}16 \cdot 120000 = 19200$ – это проценты,

120000 + 19200 = 139200 рублей – выплатит клиент с учетом процентов.

8. Держатели дисконтной карты книжного магазина получают при покупке скидку 5%. Книга стоит x рублей. Сколько рублей заплатит держатель дисконтной карты за эту книгу?

Если стоимость книги принять за 100%, то стоимость ее со скидкой – 95% от x рублей. Значит, с учетом скидки книга будет стоить $0{,}95x$ рублей.

9. За год население города увеличилось на 1,3 процента. Во сколько раз выросло население города?

Пусть население города – x жителей. За год оно увеличилось на 1,3% и стало равно

$x + 0{,}013x = 1{,}013x.$

Это значит, что население выросло в 1,013 раза.

10. Шариковая ручка стоит 40 рублей. Какое наибольшее число таких ручек можно будет купить на 900 рублей после повышения цены на 10%?

Очевидно, что 10% от 40 – это $\frac{10}{100} \cdot 40 = 0{,}1 \cdot 40 = 4$.

Новая цена ручки составит 44 рубля. На 900 рублей можно купить 20 ручек.

11. Цена на электрический чайник была повышена на 16% и составила 3480 рублей. Сколько рублей стоил чайник до повышения цены?

Запомним важное правило:

за 100% принимается та величина, с которой сравниваем

Цена повышена на 16% по сравнению с чем? – с прежней ценой. Значит, прежняя цена – это 100%, новая цена – 116%.

Получаем, что

116 % - 3480 рублей.

100 % - x рублей

Во сколько раз 3480 рублей больше, чем x рублей? – Во столько же, во сколько раз 116% больше, чем 100%, то есть

$$\frac{3480}{x} = \frac{116}{100}$$

Напомним, что такое равенство двух отношений вида $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ называется пропорцией.

Основное свойство пропорции: **произведение крайних членов равно произведению средних,** то есть $a \cdot d = b \cdot c$.

Если в пропорции есть неизвестная величина, ее можно найти именно по этому правилу.

Например, из пропорции $\frac{a}{x} = \frac{c}{d}$ находим x:

$a \cdot d = x \cdot c$

$$x = \frac{a \cdot d}{c}$$

Решаем нашу пропорцию.

$x \cdot 116 = 3480 \cdot 100$

Получаем:

$$x = \frac{3480 \cdot 100}{116}$$

Ответ: 3000.

12. Мобильный телефон стоил 3500 рублей. Через некоторое время цену на эту модель снизили до 2800 рублей. На сколько процентов была снижена цена?

Нам нужно узнать, на сколько снизилась цена по сравнению с первоначальной, поэтому первоначальную цену принимаем за 100%. Найдем, какой процент новая цена составляет от первоначальной. Обозначим его за x.

Получаем, что

3500 рублей – это 100%

2800 рублей – это x %

Составляем пропорцию:

$$\frac{3500}{2800} = \frac{100}{x}$$

и решаем ее:

$$x = \frac{2800 \cdot 100}{3500}$$

$x = 80$.

Новая цена телефона составляет 80% от первоначальной. Значит, цена была снижена на 20%.

Ответ: 20.

Еще одна задача на проценты. Обратите внимание – она не так проста, как может показаться.

13. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. После удержания налога на доходы Марья Ивановна получила 9570 рублей. Сколько рублей составляет заработная плата Марьи Ивановны?

Итак, Марья Ивановна получила 9570 рублей после удержания налога. Значит, 13% заработной платы у нее вычли, а выдали 87%. Дальше все просто: вам нужно составить пропорцию и решить ее.

$$9570 : x = 87\% : 100\,\%$$

$$x = \frac{9570 \cdot 100}{87}$$

Получаем, что зарплата Марьи Ивановны составляет 11000 рублей.

14. В городе N живет 200000 жителей. Среди них 15% детей и подростков. Среди взрослых 45% не работает (пенсионеры, студенты, домохозяйки и т.п.). Сколько взрослых жителей работает?

В чем сложность задачи и почему ее редко решают правильно? Дело в том, что «15 процентов» или «45 процентов» – понятия относительные. Каждый раз за сто процентов могут приниматься разные величины. Помните правило? В каждом случае за сто процентов принимается то, с чем мы сравниваем.

Найдем сначала, сколько в городе взрослых. По условию, дети и подростки составляют 15% от 200000 жителей. Значит, их число – это 15% от 200000, то есть надо $\frac{15}{100}$ умножить на 200000.

$\frac{15}{100} \cdot 200000 = 30000.$

Получим, что в городе N живет 30000 детей и подростков. Следовательно, взрослых 170000.

Среди взрослых 45% не работает. Теперь за 100% мы принимаем число взрослых. Получается, что число работающих взрослых жителей равно 55% от 170000, то есть 93500.

Ответ: 93500.

Часто старшеклассники говорят себе: «У меня нет способностей к математике. Наверное, я хуже всех. Никогда мне не получить хорошего образования».

Нет, ребята, так не пойдет. Хватит жалеть себя – пользы от этого не будет. И ругать себя тоже не надо. Наоборот – хвалите себя за каждую решенную задачу!

Школьная математика проста и доступна любому «гуманитарию». И если что-то не получается – дело не в загадочных «математических способностях».

Сложности начинаются, когда вы сами себя запутываете. «Убрать х» (куда убрать-то?). «Избавиться от корня» (как именно избавиться?) Появляются какие-то магические действия, смысл которых непонятен.

И наоборот – когда вы четко понимаете, что делаете, какими правилами пользуетесь, - задача решается легко.

15. Розничная цена учебника 180 рублей, она на 20% выше оптовой цены. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по оптовой цене на 11000 рублей?

Оптовая цена – та, по которой магазин получает товар. Розничная – та, по которой товар продают вам, когда вы приходите в магазин. Конечно, розничная цена выше.

Что принимаем за 100%? Очевидно, то, с чем сравниваем, то есть оптовую цену. Тогда розничная цена равна 120%. Составляем пропорцию и решаем ее. Находим, что оптовая цена учебника равна 150 рублей.

На 11000 рублей можно купить 73 учебника.

16. В школе 800 учеников, из них 30% — ученики начальной школы. Среди учеников средней и старшей школы 20% изучают немецкий язык. Сколько учеников в школе изучают немецкий язык, если в начальной школе немецкий язык не изучается?

$800 \cdot 0{,}7 = 560$ (ученики средней и старшей школы).

$0{,}2 \cdot 560 = 112$ (изучают немецкий язык).

Ответ: 112.

17. При оплате услуг через платежный терминал взимается комиссия 5%. Терминал принимает суммы кратные 10 рублям. Аня хочет положить на счет своего мобильного телефона не меньше 300 рублей. Какую минимальную сумму она должна положить в приемное устройство данного терминала?

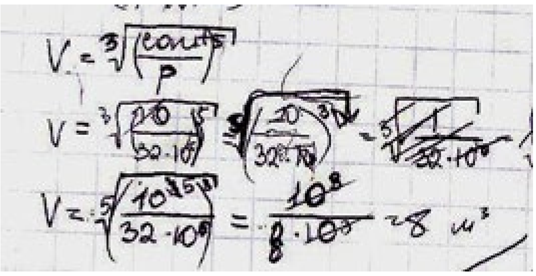
Давайте пойдем от результата, который надо получить. Аня хочет, чтобы на счету ее мобильного лежало не меньше 300 рублей. Комиссия платежного терминала 5%, значит, Аня должна скормить терминалу не менее 315 рублей. Терминал принимает купюры кратные 10 рублям, значит, минимальная сумма – 320 рублей.

Вы убедились, что среди заданий ЕГЭ есть очень простые. Вроде и ошибиться в них негде. Откуда же берутся неправильные ответы?

Оказывается, и у двоечника, и у «ботаника» одна и та же беда – арифметические ошибки. Раз вы их делаете – значит, в школе вас не научили считать быстро и правильно. Часто учителя в младшей школе показывают детям такие сложные приемы, какими ни один профессор не пользуется. Вот потому математика и кажется скучной, занудной и противной.

Чуть позже, в главе 5, я покажу вам приемы быстрого счета. В этом деле, как и в любом другом, есть свои секреты. Но сначала – о том, откуда берутся ошибки.

Верный путь к потере драгоценных баллов – грязь в вычислениях. Что-то исправлено, что-то зачеркнуто, одна цифра карябается поверх другой. Взгляните на свои черновики.



Что, похоже? :-) Пишите разборчиво. Нам бумаги не жалко. Если что-то неправильно – лучше всю строчку напишите заново, только не исправляйте одно на другое!

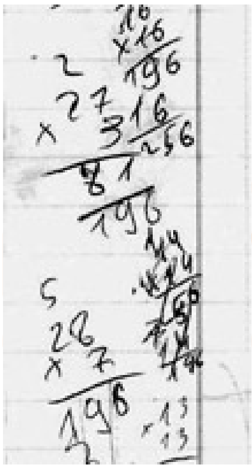
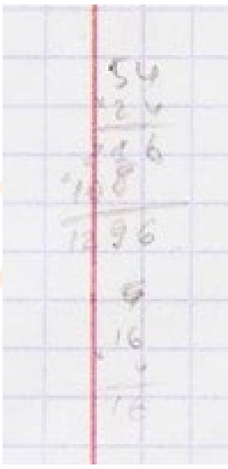
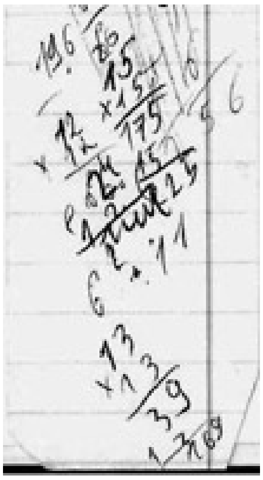
2. Второй источник ошибок – столбик. Почему-то многие, считая в столбик, стараются сделать это

– очень быстро,

– очень мелкими циферками, в уголке тетради

– карандашом.

Вот что получается:

Вы что, стесняетесь считать в столбик?! Ну и зря! Все считают в столбик, и я тоже. В этом нет ничего плохого.

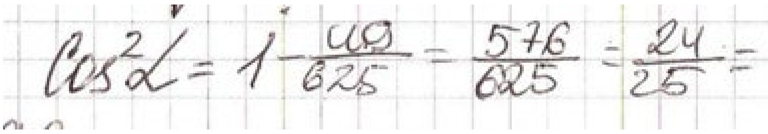
Полезно знать, что скобки в выражении ставятся не просто так!

Запись $5 \cdot (3 + 100)$ означает, что число 5 умножается на 3 (будет 15), число 5 умножается на 100 (получается 500), результаты складываются и получается 515.

$5 \cdot (3 + 100) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 100 = 15 + 500 = 515.$

Если скобки убрать, получится совсем другое число, проверьте, $5 \cdot 3 + 100 = 115$. А многие учащиеся игнорируют скобки в математических выражениях, мол, «для себя пишу».

Иногда встречается и такое:



Это все равно что письмо без знаков препинания. А читать как, если две фразы перемешались? Вот что должно быть:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{49}{625} = \frac{576}{625};$$

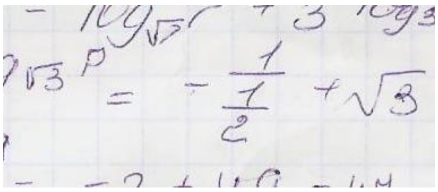
$$\sqrt{\frac{576}{625}} = \frac{24}{25}.$$

Помните, что знак равенства ставим не где попало, а только между равными величинами.

4. Больше всего арифметических ошибок связано с дробями. Если вы делите дробь на дробь – пользуйтесь тем, что $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$.

Помните, что дробную черту всегда можно заменить знаком деления**:**

И никаких многоэтажных дробей!



Видите трехэтажную дробь? Так делать не надо! Этот «гамбургер» к математике отношения не имеет.

5. Это вам для самоконтроля. Если на ЕГЭ в задании из части 1 вы получили в ответе $\frac{2}{3}$ или π, или $\sqrt{2}$, или $2x$ – ответ неверный. Придется решать задачу заново.

Да, кстати, как записывать ответ?

На экзамене вам выдадут специальные бланки. На одном из них вы увидите таблицу для записи кратких ответов к задачам 1-12. Помните, что ответ в них должен быть целым числом или конечной десятичной дробью. В каждую клеточку бланка вы вписываете один символ, то есть цифру, знак «минус» или десятичную запятую.

6. Давайте сразу договоримся грамотно называть числа. 2,3 – это две целых три десятых, а вовсе не «две третьих». 0,5 – это ноль целых пять десятых, а не «ноль пятых».

Глава 2. Текстовые задачи на движение: решаем по алгоритму!

Текстовые задачи на движение, работу, проценты, сплавы и смеси – верный балл на ЕГЭ. Ничего сложного в них нет. Нужен лишь здравый смысл и внимательное чтение условия.

Полезно помнить, что задачи на движение и работу решаются по единому алгоритму. О нем я подробно расскажу, но сначала повторим то, что вам рассказывали в программе младшей школы.

Я предлагаю вам записать в виде математического выражения:

1) x на 5 больше y
2) x в пять раз больше y
3) z на 8 меньше, чем x
4) z меньше x в 3,5 раза
5) t_1 на 1 меньше, чем t_2
6) частное от деления a на b в полтора раза больше b
7) квадрат суммы x и y равен 7
8) x составляет 60 процентов от y
9) m больше n на 15 процентов

Пока не напишете – в ответы не подглядывайте! :-)

Обычно выпускник долго думает, как же это «x на 5 больше y». А в школе в этот момент «проходят» первообразные и интегралы :-)

Итак, правильные ответы:

1) $x = y + 5$.

x больше, чем y. Разница между ними равна пяти. Значит, чтобы получить бо́льшую величину, надо к меньшей прибавить разницу.

2) $x = 5y$

x больше, чем y, в пять раз. Значит, если y умножить на 5, получим x.

3) $z = x - 8$

z меньше, чем x. Разница между ними равна 8. Чтобы получить меньшую величину, надо из большей вычесть разницу.

4) $z = x : 3{,}5$

5) $t_1 = t_2 - 1$

t_1 меньше, чем t_2. Значит, если из большей величины вычтем разницу, получим меньшую.

6) $a : b = 1{,}5b$

7) $(x + y)^2 = 7$

Напомним, что

сумма – это результат сложения двух или нескольких слагаемых;

разность – это результат вычитания;

произведение – результат умножения двух или нескольких множителей;

частное – результат деления чисел.

8) $x = 0{,}6\,y$

Мы говорили, что $60\%y = \frac{60}{100} \cdot y = 0{,}6y$

9) $m = 1{,}15n$.

Если n принять за 100%, а m на 15 процентов больше, то $m = 115\%\ n = 1{,}15n$.

Чаще всего в вариантах ЕГЭ встречаются **задачи на движение**.

Два автомобиля едут по дороге, лодка плывет по течению, а затем против течения, велосипедист обгоняет пешехода. Общая формула:

$S = v \cdot t$,

то есть расстояние = скорость · время.

Из этой формулы можно выразить скорость $v = \frac{S}{t}$ или время $t = \frac{S}{v}$.

Запомните, что **в качестве переменной *x* удобнее всего выбирать скорость**. Тогда задача точно решится!

Внимательно читаем условие. В нем уже все есть. Да и вообще в любом вопросе всегда содержится ответ :-)

1. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 50 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Известно, что в час автомобилист проезжает на 40 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт B на 4 часа позже автомобилиста. Ответ дайте в км/ч.

Что обозначить за x? Очевидно, скорость велосипедиста – ведь ее и надо найти. Автомобилист проезжает на 40 километров в час больше. Значит, скорость автомобилиста равна $x + 40$.

Нарисуем таблицу. Сразу внесем в нее расстояние. Из условия задачи известно, что и велосипедист, и автомобилист проехали по 50 км. Можно внести в таблицу скорость – она равна x и $x+40$ для велосипедиста и автомобилиста соответственно. Теперь заполним графу «время».

Найдем его по формуле: $t = \frac{S}{v}$. Для велосипедиста получим $t_1 = \frac{50}{x}$, для автомобилиста $t_2 = \frac{50}{x+40}$ и тоже запишем в таблицу.

Вот что получается:

	v	t	S
велосипедист	x	$t_1 = \frac{50}{x}$	50
автомобилист	$x + 40$	$t_2 = \frac{50}{x+40}$	50

Остается записать, что велосипедист прибыл в конечный пункт на 4 часа позже автомобилиста. Позже – значит, времени он затратил больше. Это значит, что t_1 на четыре больше, чем t_2, то есть

$$t_2 + 4 = t_1$$

$$\frac{50}{x+40} + 4 = \frac{50}{x}$$

Смотрите, как легко решается это уравнение:

$$\frac{50}{x+40} - \frac{50}{x} = 4$$

В левой части уравнения приводим дроби к одному знаменателю. Правую часть пока не трогаем. Общий знаменатель равен $x(x+40)$.

Первую дробь домножим на $(x+40)$, то есть и числитель и знаменатель умножим на $(x+40)$, вторую – на x (и числитель и знаменатель).

Получим:

$$\frac{50(x+40) - 50x}{x(x+40)} = 4$$

$$\frac{50x + 2000 - 50x}{x(x+40)} = 4$$

$$\frac{2000}{x(x+40)} = 4$$

Разделим обе части нашего уравнения на 4 (или умножим на $\frac{1}{4}$). Очевидно, оно станет проще. Но почему-то многие учащиеся забывают это делать, и в результате получаются сложные уравнения и шестизначные числа в качестве дискриминанта.

$$\frac{500}{x(x+40)} = 1$$

Умножим обе части уравнения на $x(x+40)$. Получим:

$$x(x+40) = 500$$

Раскроем скобки и перенесем всё в левую часть:

$$x^2 + 40x - 500 = 0$$

Получили квадратное уравнение. Напомним, что квадратным называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$. Решается оно стандартно.

Сначала находим дискриминант по формуле $D = b^2 - 4ac$, а затем корни по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

В нашем уравнении $a = 1$, $b = 40$, $c = - 500$.

Найдем дискриминант D = 1600 + 2000 = 3600 и корни:

$x_1 = 10$, $x_2 = - 50$.

Ясно, что x_2 не подходит по смыслу задачи, так как скорость велосипедиста не может быть отрицательной.

Ответ: 10.

Если вы забыли, что значит «возвести в квадрат», «возвести в куб» или «извлечь корень» – давайте вспомним. Ведь мы договорились, что в этой книге непонятных слов и символов не будет :-)

Возвести число в квадрат – означает умножить его само на себя.

$\mathrm{a}^2 = \mathrm{a} \cdot \mathrm{a}$

Например, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, $8^2 = 64$.

Обратите внимание, что и $(-8)^2 = 64$, то есть уравнение $\mathrm{x}^2 = 64$ имеет два решения: 8 и –8.

Квадрат любого числа всегда неотрицателен. Это очевидно - ведь если умножить положительное число на положительное, в результате получится число положительное. Как говорится, «плюс» умножить на «плюс» – получится «плюс». Если умножить «минус» на «минус» – тоже получится «плюс». А ноль в квадрате равен нулю.

Возвести число в куб – значит умножить его само на себя три раза.

$\mathrm{a}^2 = \mathrm{a} \cdot \mathrm{a} \cdot \mathrm{a}$

Например, $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $(-3)^3 = -27$,

Куб числа может быть отрицательным.

Арифметический квадратный корень из числа *a* – это такое неотрицательное число, квадрат которого равен a. Обозначается $\sqrt{a}$.

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

$$\sqrt{a} \geq 0, a \geq 0$$

Например,

$$\sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{0} = 0$$

$$\sqrt{49} = 7$$

$$\sqrt{169} = 13$$

Обратите внимание:

1) Квадратный корень можно извлекать только из неотрицательных чисел

2) Выражение $\sqrt{a}$ всегда неотрицательно. Например, $\sqrt{25} = 5$. А вот $-5 = -\sqrt{25}$.

Таблицу квадратов чисел от 10 до 30 лучше знать наизусть. Она приведена в конце этой книги, в справочных материалах.

Нам понадобятся также формулы сокращенного умножения:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Выучите их наизусть.

Еще одна задача про велосипедиста.

2. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 70 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 3 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 3 часа. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из A в B. Ответ дайте в км/ч.

Пусть скорость велосипедиста на пути из A в B равна x. Тогда его скорость на обратном пути равна $x+3$. По условию задачи, расстояние между городами A и B – 70 км, значит, в графе «расстояние» в обеих строчках пишем одно и то же – 70 км. Осталось записать время.

Поскольку $t = \frac{S}{v}$, то на путь из A в B велосипедист затратит время $t_1 = \frac{70}{x}$, а на обратный путь время $t_2 = \frac{70}{x+3}$.

	v	t	S
туда	x	$t_1 = \dfrac{70}{x}$	70
обратно	$x+3$	$t_2 = \dfrac{70}{x+3}$	70

На обратном пути велосипедист сделал остановку на 3 часа и в результате затратил столько же времени, сколько на пути из A в B. Это значит, что на обратном пути он крутил педали на 3 часа меньше.

Значит, t_2 на три меньше, чем t_1. Получается уравнение:

$$\frac{70}{x+3} + 3 = \frac{70}{x}$$

Группируем слагаемые. Всё, что с иксом, соберем в левой части уравнения. Все, что без икса – в правой части:

$$\frac{70}{x+3} - \frac{70}{x} = -3$$

Приводим дроби к одному знаменателю:

$$\frac{70(x+3)-70x}{x(x+3)}=3$$

$$\frac{70\cdot 3}{x(x+3)}=3$$

Делим обе части уравнения на 3, получаем:

$$\frac{70}{x(x+3)}=1$$

Умножим обе части уравнения на $x(x+3)$, раскроем скобки и всё соберем в левой части.

$$x^2+3x-70=0$$

Находим дискриминант. Он равен $9+4\cdot 70 = 289$.

Найдем корни уравнения: $x_1 = 7$. Это вполне правдоподобная скорость велосипедиста. А ответ $x_2 = -10$ не подходит, так как скорость велосипедиста должна быть положительна.

Ответ: 7.

Следующий тип – задачи о движении по воде. Например, теплоход, катер или моторная лодка плывет по речке, в которой есть течение.

Обычно в условии говорится о собственной скорости плавучей посудины и скорости течения. Запомним, что собственной скоростью называется скорость в неподвижной воде.

При движении по течению к собственной скорости прибавляется скорость течения. Течение помогает. Вниз по реке плыть легче, чем вверх.

Скорость судна при движении по течению реки равна сумме собственной скорости судна и скорости течения реки.

А если двигаться против течения? Течение будет мешать, относить назад. В этом случае скорость течения будет вычитаться из собственной скорости судна.

Скорость при движении против течения равна разности собственной скорости судна и скорости течения.

В текстовых задачах считается, что плот, в отличие от катера, может двигаться только со скоростью течения. На плоту нет мотора, и грести веслами на нем трудно.

3. Моторная лодка прошла против течения реки 255 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 1 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Помните, мы говорили, что в качестве неизвестной величины лучше всего выбрать скорость?

Пусть скорость лодки в неподвижной воде равна x.

Тогда скорость ее движения по течению равна $x+1$, а против течения $x-1$.

Расстояние и в ту, и в другую сторону одинаково и равно 255 км.

Внесем скорость и расстояние в таблицу.

Заполняем графу «время». Мы знаем, как это делать. При движении по течению

$t_1 = \frac{255}{x+1}$, при движении против течения $t_2 = \frac{255}{x-1}$, причем t_2 на два часа больше, чем t_1.

	v	t	S
по течению	x+1	$t_1 = \dfrac{255}{x+1}$	255
против течения	x–1	$t_2 = \dfrac{255}{x-1}$	255

Условие «t_2 на два часа больше, чем t_1» можно записать в виде алгебраического выражения:

$t_2 - 2 = t_1$

Составляем и решаем уравнение:

$$\frac{255}{x-1} - 2 = \frac{255}{x+1}$$

$$\frac{255}{x-1} - \frac{255}{x+1} = 2$$

Приводим дроби в левой части уравнения к одному знаменателю

$$\frac{255(x+1) - 255(x-1)}{(x-1)(x+1)} = 2$$

Раскрываем скобки

$$\frac{510}{x^2-1} = 2$$

Делим обе части на 2, чтобы упростить уравнение

$$\frac{255}{x^2-1} = 1$$

Умножаем обе части уравнения на $x^2 - 1$

$$x^2 - 1 = 255$$

$$x^2 = 256$$

Вообще-то это уравнение имеет два корня: 16 и –16 (оба этих числа при возведении в квадрат дают 256). Но, конечно же, отрицательный ответ не подходит по смыслу – скорость лодки должна быть положительной.

Ответ: 16.

Мы незаметно ввели новое понятие – «корни уравнения».

Напомним, что **корень уравнения** – такое число, при подстановке которого в уравнение получается верное равенство.

Решить уравнение – значит найти все его корни или доказать, что их нет.

4. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 200 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 15 км/ч, стоянка длится 10 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 40 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

Снова обозначим за x скорость течения. Тогда скорость движения теплохода по течению равна $15+x$, а скорость его движения против течения равна $15 - x$. Расстояние и в ту, и в другую сторону одинаково и равно 200 км.

Осталось заполнить графу «время».

Поскольку $t = \frac{S}{v}$, время t_1 движения теплохода по течению равно $\frac{200}{15+x}$, а время t_2, которое теплоход затратил на движение против течения, равно $\frac{200}{15-x}$.

	v	t	S
по течению	$15+x$	$\frac{200}{15+x}$	200
против течения	$15-x$	$\frac{200}{15-x}$	200

В пункт отправления теплоход вернулся через 40 часов после отплытия. 10 часов из этого времени длилась стоянка, следовательно, 30 часов теплоход был в пути, то есть плыл сначала по течению, затем – против течения.

Значит, $t_1 + t_2 = 30$.

$$\frac{200}{15+x} + \frac{200}{15-x} = 30$$

Прежде всего, разделим обе части уравнения на 10. Оно станет проще!

$$\frac{20}{15+x} + \frac{20}{15-x} = 3$$

Мы не будем подробно останавливаться на технике решения уравнения. Всё уже понятно – приводим дроби в левой части уравнения к одному знаменателю, затем умножаем обе части уравнения на $225 - x^2$, получаем квадратное уравнение $x^2 = 25$. Поскольку скорость течения положительна, получаем: $x = 5$.

Ответ: 5.

Вы, наверное, заметили, как все эти задачи похожи. Текстовые задачи хороши еще и тем, что ответ легко проверить с точки зрения здравого смысла. Ясно, что расстояние, которое пройдет пешеход за три часа, никак не может быть равно тысяче километров, а скорость теплохода, идущего вверх по реке, не должна быть меньше скорости течения.

5. Баржа в 10:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 15 км от А. Пробыв в пункте В 1 час 20 минут, баржа отправилась назад и вернулась в пункт А в 16:00. Определите (в км/час) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость баржи равна 7 км/ч.

Пусть скорость течения равна x. Тогда по течению баржа плывет со скоростью $7+x$, а против течения со скоростью $7-x$.

Сколько времени баржа плыла? Ясно, что надо от 16 отнять 10, а затем вычесть время стоянки. Обратите внимание, что 1 час 20 минут придется перевести в часы: 1 час 20 минут равно $1\frac{1}{3}$ часа. Получаем, что суммарное время движения баржи (по течению и против) равно $4\frac{2}{3}$ часа.

	v	t	S
по течению	$7+x$	t_1	15
против течения	$7-x$	t_2	15

$t_1 + t_2 = 4\frac{2}{3}$

Возникает вопрос – какой из пунктов, А или В, расположен выше по течению? А какая разница? В данной задаче это неважно. Ведь в уравнение входит сумма $t_1 + t_2$, равная

$\frac{15}{7+x} + \frac{15}{7-x}$.

Итак, $\frac{15}{7+x} + \frac{15}{7-x} = 4\frac{2}{3}$.

Решим это уравнение. Число $4\frac{2}{3}$ в правой части уравнения представим в виде неправильной дроби: $4\frac{2}{3} = \frac{14}{3}$.

Приведем дроби в левой части уравнения к общему знаменателю, раскроем скобки и упростим. Получим:

$$30 \cdot 7 = \frac{14}{3} \cdot (49 - x^2)$$

Работать с дробными коэффициентами неудобно! Если разделить обе части уравнения на 14 и умножить на 3, оно станет значительно проще:

$$45 = 49 - x^2$$

$$x^2 = 4$$

Поскольку скорость течения положительна, $x = 2$.

Ответ: 2.

Вот мы и научились решать задачи на движение.

Открою вам еще один секрет. Способ, показанный в этой главе, подробный, правильный… но при этом длинный и скучный. Оказывается, есть забавный прием, с помощью которого такие задачи решаются в 10 раз проще и быстрее.

Этот лайфхак я часто показываю у себя на Ютьюбе – так что подписывайтесь!

А на занятиях Онлайн-курса подготовки к ЕГЭ мы изучаем и «правильные» способы решения задач ЕГЭ, и лайфхаки, помогающие сэкономить на экзамене драгоценное время.

Хотите о них узнать? Присоединяйтесь к курсу или хотя бы попробуйте Демо-доступ!

Глава 3. Задачи на работу и секрет успешных людей

Следующий тип заданий, часто встречающийся в вариантах ЕГЭ по математике, – задачи на работу. Они тоже решаются по одной-единственной формуле: $A = p \cdot t$.

Здесь A – работа, t – время, а величина p – **производительность** (по смыслу является скоростью работы). Она показывает, сколько работы сделано в единицу времени.

Мини-пекарня печет булочки. Количество булочек, испеченных за день, – это производительность пекарни.

Художник в мастерской расписывает ёлочные шарики. Его производительность – количество расписанных шариков в день.

Бригада строит тоннель метро. Производительность бригады – сколько метров тоннеля построено за месяц.

Труба наполняет бассейн. Количество литров воды в минуту также можно назвать производительностью трубы.

Правила решения таких задач очень просты.

1. A = p · t, то есть работа = производительность · время. Из этой формулы легко найти t или p.

2. Если объем работы не важен и в задаче нет данных, позволяющих его найти, то работа принимается за единицу.

Например, построен дом (один). Написана книга (одна). А вот если речь идет о количестве кирпичей, булочек, страниц или построенных домов – работа как раз и равна этому количеству.

3. В качестве переменной удобно взять именно производительность.

4. Если трудятся двое рабочих (два экскаватора, два завода...) – их производительности складываются.

Покажем, как это применяется на практике.

1. Заказ на 110 деталей первый рабочий выполняет на 1 час быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 1 деталь больше?

Так же, как в задачах на движение, заполним таблицу.

В колонке «работа» и для первого, и для второго рабочего запишем: 110. В задаче спрашивается, сколько деталей в час делает второй рабочий, то есть чему равна его производительность. Примем ее за x. Тогда производительность первого рабочего равна x+1 (он делает на одну деталь в час больше). Поскольку $t = \frac{A}{p}$, время работы первого рабочего равно $t_1 = \frac{110}{x+1}$, время работы второго равно $t_2 = \frac{110}{x}$.

	p	t	A
первый рабочий	$x + 1$	$t_1 = \dfrac{110}{x+1}$	110
второй рабочий	x	$t_2 = \dfrac{110}{x}$	110

Первый рабочий выполнил заказ на час быстрее. Следовательно, t_1 на 1 меньше, чем t_2, то есть

$t_1 = t_2 - 1$

$$\frac{110}{x+1} = \frac{110}{x} - 1$$

Мы уже решали такие уравнения. Оно сводится к квадратному:

$$x^2 + x - 110 = 0$$

Дискриминант равен 441. Корни уравнения: $x_1 = 10,\ x_2 = -11$.

Очевидно, производительность рабочего не может быть отрицательной – ведь он производит детали, а не уничтожает их :-) Значит, отрицательный корень уравнения не подходит по смыслу.

Ответ: 10.

2. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за два дня выполняет такую же часть работы, какую второй – за три дня?

В этой задаче (в отличие от предыдущей) ничего не сказано о том, какая это работа, чему равен ее объем. Значит, работу можем принять за единицу.

А что же обозначить за переменные?

Мы уже говорили, что за переменную удобно обозначить производительность. Пусть x – производительность первого рабочего. Производительность второго тоже нужна, и ее мы обозначим за y.

По условию, первый рабочий за два дня делает такую же часть работы, какую второй – за три дня. Значит, $2x = 3y$. Отсюда $y = \frac{2x}{3}$.

Трудясь вместе, эти двое сделали всю работу за 12 дней. При совместной работе производительности складываются, значит,

$$(x + y) \cdot 12 = 1$$

$$\left(x + \frac{2}{3}x\right) \cdot 12 = 1$$

$$\frac{5}{3}x \cdot 12 = 1$$

$$20x = 1$$

$$x = \frac{1}{20}.$$

Итак, первый рабочий за день выполняет $\frac{1}{20}$ всей работы. Значит, на всю работу ему понадобится 20 дней.

Ответ: 20.

3. Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 110 литров она заполняет на 2 минуты дольше, чем вторая труба заполняет резервуар объемом 99 литров?

Примем производительность первой трубы за x. Именно эту величину и требуется найти в задаче. Тогда производительность второй трубы равна $x+1$, поскольку вторая пропускает на один литр в минуту больше, чем первая. Заполним таблицу:

	p	t	A
первая труба	x	$t_1 = \frac{110}{x}$	110
вторая труба	$x+1$	$t_2 = \frac{99}{x+1}$	99

Первая труба заполняет резервуар на две минуты дольше, чем вторая. Значит,

$t_1 - t_2 = 2$. Составим уравнение:

$$\frac{110}{x} - \frac{99}{x+1} = 2$$

и решим его.

Ответ: 10.

Всевозможные задачи про две трубы, наполняющие какой-либо резервуар для воды, – это тоже задачи на работу. В них также фигурируют знакомые вам величины – производительность, время и работа.

А что делать, если вы все равно не понимаете, как сокращать дроби или решать квадратные уравнения?

Выход есть! Вы же ходите в школу! :-)

Помните, что учительница математики может оказать вам неоценимую помощь в подготовке к ЕГЭ. Ваша задача – превратить ее из придирчивого критика в доброжелательного консультанта. Это возможно. Более того – это нужно сделать. Именно сейчас, когда время до экзамена еще есть.

Понаблюдайте – ведь многие ваши товарищи с легкостью обращаются к педагогу за помощью, а другие готовы остаться неграмотными, но ни за что не подойдут и не спросят.

Почему, как вы думаете? Почему одни без труда получают ответ на интересующий их вопрос, а у других бесконечный «конфликт с учительницей»? Более того, «конфликт с учительницей» как бы оправдывает незнание предмета и нежелание разбираться.

В чем дело?

Возможно, вы читали книгу Малкольма Гладуэлла «Гении и аутсайдеры». Эта книга стала бестселлером. Она – о том, каким закономерностям подчиняется жизнь гениев и как помочь детям и подросткам достичь успеха. И еще, почему вообще одни люди достигают успеха, а другие – нет. О том, что самое главное даже – не родиться «умным», а развивать свои способности.

И вот в этой книге есть неожиданные результаты исследований, проведенных в Америке несколько лет назад. Исследования касались того, как ведут себя с учителями (да и вообще со взрослыми) дети из обеспеченных семей и дети из бедных семей.

Оказывается, у детей из обеспеченных семей в большей степени развит так называемый, **практический интеллект** – интуитивное знание о том, **что** сказать, **как** действовать, чтобы достичь максимального результата.

Такие ребята свободнее общаются с учителями, чувствуют себя комфортнее, разбираются в правилах, знают свои права, могут повернуть разговор в нужную сторону. Они обращаются к учителям с просьбами – и достигают успеха.

А вот дети из бедных семей обычно не умеют добиваться желаемого, не могут управлять ситуацией – их этому не учили. Они безынициативны! Они даже не пытаются повлиять на обстоятельства, а принимают их как должное: «Да, учительница нехорошая, злая, поэтому я никогда не выучу математику». Они могут пять лет вздыхать, что в школе ничему не учат, но не пойдут искать хорошую школу. А знаете ли вы, что нельзя научить – можно научиться! Если у вас нет желания научиться, то даже самая лучшая, добрая и знающая учительница не сможет вас научить. Желание – это огромная движущая сила и половина пути к успеху во всем!

Удивительно, что граница между этими двумя типами поведения у американских подростков проходит четко между социальными классами.

Я не знаю, насколько это верно для российского общества. Однако факт остается фактом – одни люди умеют обращаться за помощью и получать ее, а другие – нет. Я замечала это много раз.

Но кто вам мешает научиться? :-)

Конечно, если вы просто подойдете к своей учительнице и скажете: «Я не понимаю математику!» – результата не будет. Такая фраза слишком абстрактна и не располагает к ответу. Учительница может ответить, например, что ей вас жалко. Или наоборот – выдаст какую-либо характеристику вашей личности. И то и другое неконструктивно.

А вам ведь нужен положительный результат, поэтому задавайте очень конкретные вопросы. Просите объяснить, как приводить дроби к общему знаменателю; как раскрывать скобки или как решать именно это уравнение.

Обращаясь к своей школьной учительнице, называйте ее по имени-отчеству: «Анна Георгиевна, расскажите, пожалуйста, как складывать дроби». Вот увидите – это подействует! Это позитивно действует на всех учителей и преподавателей без исключения. Работая с группой школьников, я замечаю, что одни просто вламываются в класс, в лучшем случае буркнув «здрасьти!», а другие здороваются более грамотно: «Добрый день, Анна Георгиевна». Второй вариант приветствия мне нравится намного больше :-)

Еще важная деталь – обращайтесь за помощью в подходящий момент, когда ваша учительница действительно может вам ответить. Если педагог занят, договоритесь об удобном времени консультации. Добивайтесь своего. Помните – у вас есть право на получение образования.

Для чего? Не только для того, чтобы сдать ЕГЭ на положительную оценку. И не только для того, чтобы поступить в вуз.

Оказывается, один из секретов успешных людей – умение договариваться, умение строить отношения. Есть даже такой афоризм – «Никому еще не удавалось разбогатеть в одиночку». Найти общий язык с учительницей, сформулировать вопрос и получить ответ, повернуть ситуацию в свою пользу – всё это не менее важно в жизни, чем знание тригонометрических формул или таблицы производных.

А скорее всего – во много раз важнее! Так что тренируйтесь быть успешным человеком, не теряйте времени! :-)

Глава 4. Задачи на проценты, растворы, встречное движение, быстрый счет без калькулятора и принцип KISS.

Вернемся к задачам на проценты. С этой темой мы уже познакомились в первой главе. В частности, вывели ценное правило:

за 100% мы принимаем ту величину, с которой сравниваем.

Запомним еще несколько полезных формул:

если величину x увеличить на p процентов, получим

$x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$;

если величину x уменьшить на p процентов, получим

$x \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$;

если величину x увеличить на p процентов, а затем уменьшить на q процентов, получим

$x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{q}{100}\right)$;

если величину x дважды увеличить на p процентов, получим

$x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$;

если величину x дважды уменьшить на p процентов, получим

$x \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2$.

Все эти соотношения выводятся элементарно. В самом деле, если величина x увеличилась на p% – это значит, что к x прибавили $\frac{p}{100} \cdot x$. Вынесем x за скобки:

$$x + \frac{p}{100}x = x\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Остальные формулы получаются аналогично.

Воспользуемся ими для решения задач.

1. В 2018 году в городском квартале проживало 40000 человек. В 2019 году, в результате строительства новых домов, число жителей выросло на 8%, а в 2020 году – на 9% по сравнению с 2019 годом. Сколько человек стало проживать в квартале в 2020 году?

По условию, в 2019 году число жителей выросло на 8%, то есть стало равно $40000 \cdot 1{,}08 = 43200$ человек.

А в 2020 году число жителей выросло на 9%, теперь уже по сравнению с 2019 годом. Получаем, что в 2020 году в квартале стало проживать $40000 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}09 = 47088$ жителей.

Ответ: 47088.

2. В понедельник акции компании подорожали на некоторое количество процентов, а во вторник подешевели на то же самое количество процентов. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

На первый взгляд кажется, что в условии ошибка и цена акций вообще не должна измениться. Ведь они подорожали и подешевели на одно и то же число процентов! Но не будем спешить.

Пусть при открытии торгов в понедельник акции стоили x рублей. К вечеру понедельника они подорожали на $p\%$ и стали стоить $x \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)$ рублей. Теперь уже эта величина принимается за 100%, и к вечеру вторника акции подешевели на $p\%$ по сравнению с этой величиной.

Соберем данные в таблицу:

	в понедельник утром	в понедельник вечером	во вторник вечером
стоимость акций	x	$x \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)$	$x \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1-\frac{p}{100}\right)$

По условию, акции в итоге подешевели на 4%.

Получается, что

$$x \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1-\frac{p}{100}\right) = x \cdot \left(1-\frac{4}{100}\right)$$

Поделим обе части уравнения на x (ведь он не равен нулю, значит, делить на него можно) и вспомним, что $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. Применим эту формулу в левой части уравнения:

$$1-\frac{p^2}{100}=1-\frac{4}{100}$$

$$\frac{p^2}{100}=\frac{4}{100}$$

По смыслу задачи, $p>0$.

Получаем, что $p=20$.

3. Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если, выставленный на продажу за 20000 рублей, через два года был продан за 15842 рублей.

Эта задача тоже решается по одной из формул, приведенных в начале главы. Холодильник стоил 20000 рублей. Его цена два раза уменьшилась на $p\%$, и теперь она равна 15842 рубля.

$$20000\left(1-\frac{p}{100}\right)^2=15842$$

$$\left(1-\frac{p}{100}\right)^2=\frac{15842}{20000}$$

$$\left(1-\frac{p}{100}\right)^2=\frac{7921}{10000}$$

Извлечем корень из обеих частей уравнения:

$$1 - \frac{p}{100} = \frac{89}{100}$$

$$p = 11.$$

4. Четыре рубашки дешевле куртки на 8%. На сколько процентов пять рубашек дороже куртки?

Пусть стоимость рубашки равна x, стоимость куртки y. Как всегда, принимаем за сто процентов ту величину, с которой сравниваем. В данном случае это цена куртки. Тогда стоимость четырех рубашек составляет 96% от цены куртки, то есть $4x = 0{,}92y$.

Стоимость одной рубашки – в 4 раза меньше: $x = 0{,}23y$

а стоимость пяти рубашек: $5x = 1{,}15y = \frac{115}{100}y = 115\%\ y$.

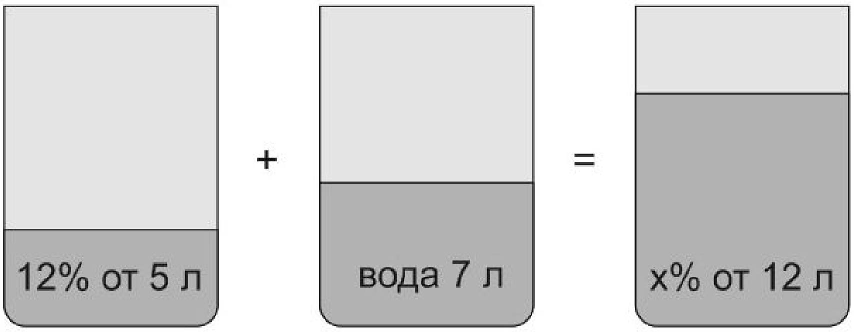
Получили, что пять рубашек на 15% дороже куртки.

Ответ: 15.

Следующий тип – задачи на растворы, смеси и сплавы. Они встречаются не только в математике, но и в химии. Мы покажем самый простой способ их решения.

5. В сосуд, содержащий 5 литров 12-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 7 литров воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

В решении подобных задач помогает картинка. Изобразим сосуд с раствором схематично – так, как будто вещество и вода в нем не перемешаны между собой, а разделены, как в коктейле. И подпишем, сколько литров содержат сосуды и сколько в них процентов вещества. Концентрацию[1] получившегося раствора обозначим x.



Первый сосуд содержал $0{,}12 \cdot 5 = 0{,}6$ литра вещества. Во втором сосуде была только вода. Значит, в третьем сосуде столько же литров вещества, сколько и в первом:

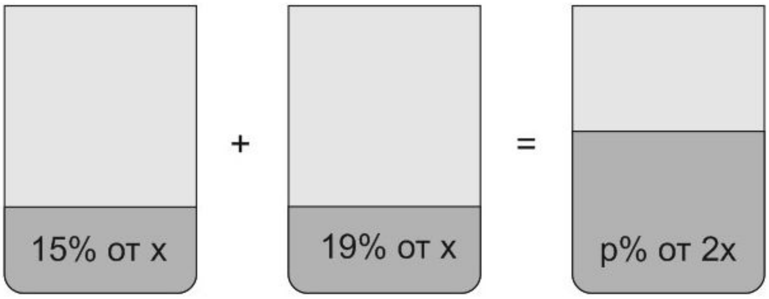
$$0{,}12 \cdot 5 = \frac{x}{100} \cdot 12$$

[1] Напомним, что **концентрацией** называется отношение объема вещества к объему раствора. Или – отношение массы вещества к массе раствора.

$x = 5.$

6. Смешали некоторое количество 15-процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 19-процентного раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Пусть масса первого раствора равна x. Масса второго – тоже x. В результате получили раствор массой $2x$. Рисуем картинку.



Масса вещества в первом растворе равна 15% от x, то есть $0{,}15x$. Масса вещества во втором растворе $0{,}19x$.

Получаем: $0{,}15x + 0{,}19x = 0{,}34x$

Масса вещества в третьем растворе составляет p% от 2x, то есть равна $\frac{p}{100} \cdot 2x$

Получим: $0{,}34x = \frac{p}{100} \cdot 2x$

Отсюда $x = 17.$

Ответ: 17.

7. Виноград содержит 90% влаги, а изюм – 5%. Сколько килограммов винограда требуется для получения 20 килограммов изюма?

Внимание! Если вам встретилась задача «о продуктах», то есть такая, где из винограда получается изюм, из абрикосов курага, из хлеба сухари или из молока творог – знайте, что на самом деле это задача на растворы.

Виноград тоже можно условно изобразить как раствор. В нем есть вода и «сухое вещество». У «сухого вещества» сложный химический состав, а по его вкусу, цвету и запаху можно понять, что это именно виноград, а не картошка.

Изюм получается, когда из винограда испаряется вода. При этом количество «сухого вещества» остается постоянным. В винограде содержалось 90% воды, значит, «сухого вещества» было 10%. В изюме 5% воды и 95% «сухого вещества». Пусть из x кг винограда получилось 20 кг изюма. Тогда

10% от x = 95% от 20

Составим уравнение:

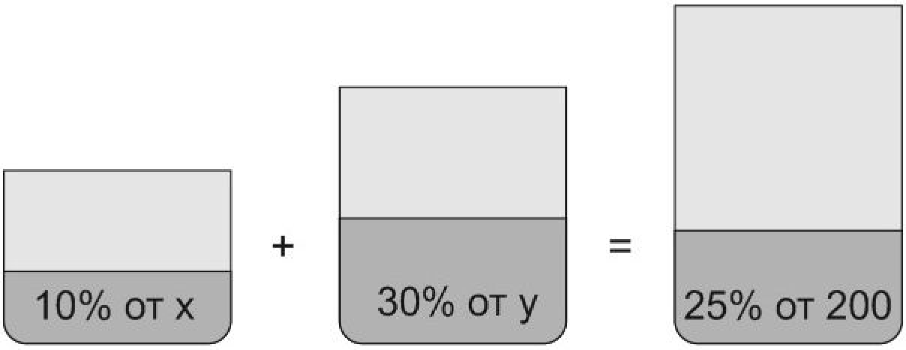
$0{,}1x = 0{,}95 \cdot 20$

и найдем x.

Ответ: 190.

8. Имеется два сплава. Первый сплав содержит 10% никеля, второй – 30% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?

Пусть масса первого сплава равна x, а масса второго равна y. В результате получили сплав массой $x + y = 200$ кг.



Запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 200, \\ 0{,}1x + 0{,}3y = 0{,}25 \cdot 200; \end{cases}$$

Первое уравнение – масса получившегося сплава, второе – масса никеля.

Нам нужно найти такие x и y, чтобы при подстановке в оба уравнения они давали верные равенства.

Как решить эту систему?

Прежде всего, упростим второе уравнение. Умножим обе его части на 10, чтобы коэффициенты стали целыми. Ведь с целыми коэффициентами проще работать, чем с дробными.

$$\begin{cases} x + y = 200, \\ x + 3y = 500; \end{cases}$$

Выразим x из первого уравнения: $x = 200 - y$.

Во второе уравнение вместо х подставим выражение $200 - y$

$200 - y + 3y = 500$.

Получили уравнение с одной переменной. Решая его, получим, что $y = 150$.

Подставив в первое уравнение $y = 150$, получаем, что $x = 50$.

По условию, надо найти, на сколько килограмм масса второго сплава больше массы первого.

Ответ: 100.

9. Смешав 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси?

Пусть масса первого раствора x, масса второго равна y. Масса получившегося раствора равна $x + y = 10$. Запишем два уравнения, для количества кислоты.

$$\begin{cases} 0{,}3x + 0{,}6y = 0{,}36(x + y + 10) \\ 0{,}3x + 0{,}6y + 0{,}5 \cdot 10 = 0{,}41(x + y + 10) \end{cases}$$

Решаем получившуюся систему. Сразу умножим обе части уравнений на 100, поскольку с целыми коэффициентами удобнее работать, чем с дробными. Раскроем скобки.

$$\begin{cases} 30x + 60y = 36x + 36y + 360 \\ 30x + 60y + 500 = 41x + 41y + 410 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4y - x = 60 \\ 11x - 19y = 90 \end{cases}$$

Выразим x из первого уравнения: $x = 4y – 60$.

Подставим во второе уравнение вместо x выражение $4y – 60$. Получим уравнение с одной переменной:

$11(4y – 60) – 19y = 90$.

Решив его, найдем $y = 30$.

Подставим $y = 30$ в первое уравнение. Тогда $x = 60$.

Ответ: 60.

Задачи на движение по окружности на первый взгляд кажутся сложными. В них тоже применяется формула $S = v \cdot t$. Правда, есть одна хитрость, о которой мы расскажем по ходу дела.

10. Из пункта A круговой трассы выехал велосипедист, а через 30 минут следом за ним отправился мотоциклист. Через 10 минут после отправления он догнал велосипедиста в первый раз, а еще через 30 минут после этого догнал его во второй раз. Найдите скорость мотоциклиста, если длина трассы равна 30 км. Ответ дайте в км/ч.

Во-первых, переведем минуты в часы, поскольку скорость надо найти в км/ч. Скорости участников обозначим за x и y. В первый раз мотоциклист обогнал велосипедиста через 10 минут, то есть через $\frac{1}{6}$ часа после старта. До этого момента велосипедист был в пути 40 минут, то есть $\frac{2}{3}$ часа.

Запишем эти данные в таблицу:

	v	t	S
велосипедист	x	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}x$
мотоциклист	y	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}y$

Оба проехали одинаковые расстояния, то есть $\frac{1}{6}y = \frac{2}{3}x$.

Затем мотоциклист второй раз обогнал велосипедиста. Произошло это через 30 минут, то есть через $\frac{1}{2}$ часа после первого обгона.

Нарисуем вторую таблицу.

	v	t	S
велосипедист	x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}x$
мотоциклист	y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}y$

А что можно сказать о расстояниях, которые они проехали? Мотоциклист обогнал велосипедиста. Значит, он проехал на один круг больше. Это и есть секрет данной задачи. Один круг – это длина трассы, она равна 30 км. Вот и второе уравнение:

$$\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x = 30$$

Решим получившуюся систему.

$$\begin{cases} \frac{1}{6}y = \frac{2}{3}x \\ \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4x \\ y - x = 60 \end{cases}$$

Получим, что $x = 20$, $y = 80$. В ответ запишем скорость мотоциклиста.

Ответ: 80.

На экзамене по математике вам может встретиться задача о нахождении средней скорости.

Запомним, что средняя скорость **не равна** среднему арифметическому скоростей. Она находится по специальной формуле:

$$v_{\text{средняя}} = \frac{S_{\text{общее}}}{t_{\text{общее}}}$$

Если участков пути было два, то

$$v_{\text{средняя}} = \frac{S_1 + S_2}{t_1 + t_2}$$

11. Путешественник переплыл море на яхте со средней скоростью 20 км/ч. Обратно он летел на спортивном самолете со скоростью 480 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Мы не знаем, каким было расстояние, которое преодолел путешественник. Знаем только, что оно было одинаковым в обе стороны, туда и обратно.

Для простоты примем это расстояние за 1 (одно море). Тогда время, которое путешественник плыл на яхте, равно $\frac{1}{20}$, а время, затраченное на полет, равно $\frac{1}{480}$. Общее время равно $\frac{1}{20} + \frac{1}{480} = \frac{25}{480} = \frac{5}{96}$.

Средняя скорость равна $2 : \frac{5}{96} = 38{,}4$ км/ч.

Ответ: 38,4.

Покажем еще один эффектный прием, помогающий быстро решить систему уравнений в задаче.

12. Андрей и Паша красят забор за 9 часов. Паша и Володя красят этот же забор за 12 часов, а Володя и Андрей – за 18 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроем?

Мы уже решали задачи на работу и производительность. Правила те же. Отличие лишь в том, что здесь работают трое, и переменных будет тоже три. Пусть x – производительность Андрея, y – производительность Паши, а z – производительность Володи. Забор, то есть величину работы, примем за 1 – ведь мы ничего не можем сказать о его размере.

	Производительность	Работа
Андрей	x	1
Паша	y	1
Володя	z	1
Вместе	$x+y+z$	1

Андрей и Паша покрасили забор за 9 часов. При совместной работе производительности складываются. Запишем уравнение:

$$(x+y)\cdot 9 = 1$$

Аналогично

$$(y+z)\cdot 12 = 1$$

$$(x+z)\cdot 18 = 1$$

Тогда

$$\begin{cases} x+y=\frac{1}{9}, \\ y+z=\frac{1}{12}, \\ x+z=\frac{1}{18}; \end{cases}$$

Можно искать x, y и z по отдельности, но лучше просто сложить все три уравнения. Получим, что

$$2(x+y+z)=\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}$$

$$x + y + z = \frac{1}{8}$$

Значит, работая втроем, Андрей, Паша и Володя красят за час одну восьмую часть забора. Весь забор они покрасят за 8 часов.

Ответ: 8.

13. Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 67%. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 4%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

Нарисуем таблицу. Ситуации, о которых говорится в задаче («если бы зарплата мужа увеличилась, если бы стипендия дочки уменьшилась...») назовем «ситуация А» и «ситуация В».

	муж	жена	дочь	общий доход
в реальности	x	y	z	$x+y+z$
ситуация А	$2x$	y	z	$1{,}67\ (x+y+z)$
ситуация В	x	y	$\frac{1}{3}z$	$0{,}92(x+y+z)$

Остается записать систему уравнений.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1{,}67(x + y + z) \\ x + y + \frac{2}{3}z = 0{,}96(x + y + z) \end{cases}$$

Но что мы видим? Два уравнения и три неизвестных! Мы не сможем найти x, y и z по отдельности. Да это и не нужно. Ведь в ответе нам нужно записать отношение зарплаты жены к общему доходу семьи, то есть $\frac{y}{x+y+z}$.

Поэтому возьмем первое уравнение и из обеих его частей вычтем сумму (x+y+z). Получим:

$$x = 0{,}67\ (\mathrm{x} + y + z)$$

Это значит, что зарплата мужа составляет 67% от общего дохода семьи.

Во втором уравнении мы тоже вычтем из обеих частей выражение x+y+z, упростим и получим, что

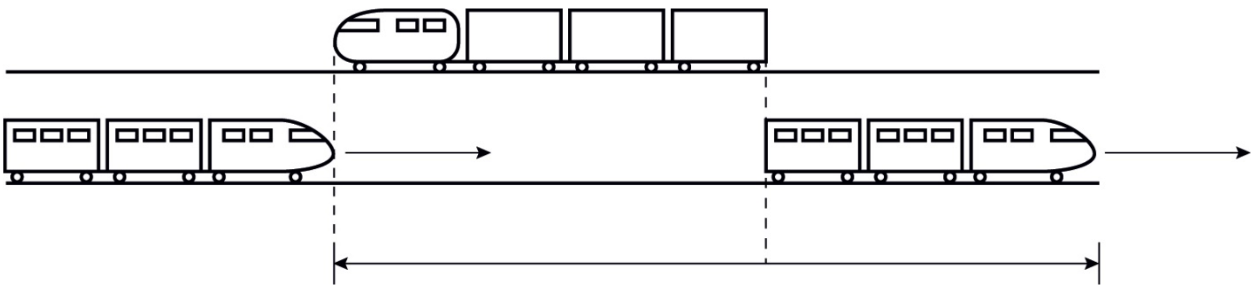
$$z = 0{,}06(\mathrm{x} + y + z)$$

Значит, стипендия дочки составляет 6% от общего дохода семьи. Тогда зарплата жены составляет 27% общего дохода.

Ответ: 27.

14. По двум параллельным железнодорожным путям друг навстречу другу следуют скорый и пассажирский поезда, скорости которых равны соответственно 60 км/ч и 30 км/ч. Длина пассажирского поезда равна 400 метрам. Найдите длину скорого поезда, если время, за которое он прошел мимо пассажирского поезда, равно 38 секундам. Ответ дайте в метрах.

Решим задачу в системе отсчета, связанную с головой пассажирского поезда. Представим, что мы находимся в кабине машиниста неподвижного поезда, а мимо нас проносится скорый поезд. Скорость, с которой один поезд движется относительно другого, равна $v = v_1 + v_2 = 30 + 60 = 90$ км/ч.



Тогда 38 секунд, за которые движущийся поезд проезжает мимо неподвижного, – это время от момента, когда голова первого поезда поравнялась с хвостом второго, до момента, когда хвост первого поезда поравнялся с головой второго (смотри рисунки) За это время скорый поезд проезжает расстояние, равное сумме длин двух поездов.

Переведем 38 секунд в часы:

$38с = \frac{38}{60}мин = \frac{38}{3600}ч = \frac{19}{1800}ч.$

За это время поезд проехал $S = v \cdot t = 90 \cdot \frac{19}{1800} = 0{,}95км = 950м.$

$l_{I\ поезда} = S - l_{II\ поезда} = 950 - 400 = 550м.$

Ответ: 550

Вы знаете, что правила проведения ЕГЭ не разрешают пользоваться калькулятором на экзамене по математике. На самом деле калькулятор там и не нужен. Все задачи решаются без него. Главное – внимание, аккуратность и некоторые секретные приемы.

1. Начнем с главного правила.

Если какое-то вычисление можно упростить – упростите его.

Например, такое уравнение с «дьявольскими» коэффициентами:

$666x^2 + 999x - 666 = 0$

Семьдесят процентов выпускников решают его «в лоб». Считают дискриминант по формуле $D = b^2 - 4ac$, после чего говорят, что корень невозможно извлечь без калькулятора. Но ведь можно разделить левую и правую части уравнения на 333. Получится

$2x^2 + 3x - 2 = 0$

Какой способ проще? :-)

2. Скорее всего, вы не любите умножение в столбик. Да, никому не нравилось в четвертом классе решать скучные «примеры». Однако перемножить числа во многих случаях можно и без столбика, в строчку. Это намного быстрее.

$385 \cdot 7 = 300 \cdot 7 + 80 \cdot 7 + 5 \cdot 7 = 2100 + 560 + 35 = 2660 + 35 = 2695$

$18 \cdot 17 = 18 \cdot 10 + 18 \cdot 7 = 180 + 10 \cdot 7 + 8 \cdot 7 = 180 + 70 + 56 = 250 + 56 = 306$

Обратите внимание, что мы начинаем не с меньших разрядов, а с больших. Это удобно.

3. Теперь – деление. Нелегко в столбик разделить 9450 на 2100. Но вспомним, что знак деления : и дробная черта – одно и то же. Запишем $9450 : 2100$ в виде дроби и сократим эту дробь:

$$\frac{9450}{2100} = \frac{945}{210} = \frac{315}{70} = \frac{63}{14} = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

Другой пример.

$$364 : 1040 = \frac{364}{1040} = \frac{182}{520} = \frac{91}{260} = \frac{7}{20} = 0{,}35$$

4. Как быстро и без всяких столбиков возвести в квадрат двузначное число? Применяем одну из формул сокращенного умножения:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$23^2 = (20+3)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 3 + 3^2 = 400 + 120 + 9 = 529$

$39^2 = (30+9)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 9 + 9^2 = 900 + 540 + 81 = 1521$

$44^2 = (40+4)^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 4 + 4^2 = 1600 + 320 + 16 = 1936.$

Иногда удобно использовать и другую формулу:

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$78^2 = (80-2)^2 = 6400 - 320 + 4 = 6084$

$89^2 = (90-1)^2 = 8100 - 180 + 1 = 7921$

5. Числа, оканчивающиеся на 5, в квадрат возводятся моментально.

Допустим, надо найти квадрат числа A5 (A – не обязательно цифра, любое натуральное число). Умножаем A на A+1 и к результату приписываем 25. Всё!

Например: $45^2 = 2025$, то есть $4 \cdot 5 = 20$ и приписали 25.

$65^2 = 4225$, то есть $6 \cdot 7 = 42$ и приписали 25.

$125^2 = 15625$, то есть $12 \cdot 13 = 156$ и приписали 25.

Этот способ полезен не только для возведения в квадрат, но для извлечения квадратного корня из чисел, оканчивающихся на 25.

6. А как вообще извлечь квадратный корень без калькулятора? Покажем два способа.

Первый способ – разложение подкоренного выражения на множители.

Например, найдем $\sqrt{6561}$

Число 6561 делится на 3 (так как сумма его цифр делится на 3). Разложим 6561 на множители:

$6561 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 81 = 81 \cdot 81$

$\sqrt{6561} = 81$

Найдем $\sqrt{2916}$. Это число делится на 2. На 3 оно тоже делится. Раскладываем 2916 на множители.

$\sqrt{2916} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 27} = 2 \cdot 27 = 54$

Еще пример.

$\sqrt{4356} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 11} = 66$

Есть и второй способ. Он удобен, если число, из которого надо извлечь корень, никак не получается разложить на множители.

Например, надо найти $\sqrt{5041}$. Число под корнем – нечетное, оно не делится на 3, не делится на 5, не делится на 7... Можно и дальше искать, на что же оно все-таки делится, а можно поступить проще – найти этот корень подбором.

Очевидно, что в квадрат возводили двузначное число, которое находится между числами 70 и 80, поскольку $70^2 = 4900$, $80^2 = 6400$, а число 5041 находится между ними. Первую цифру в ответе мы уже знаем, это 7.

Последняя цифра в числе 5041 равна 1. Поскольку $1^2 = 1$, $9^2 = 81$, последняя цифра в ответе – либо 1, либо 9. Проверим:

$71^2 = (70 + 1)^2 = 4900 + 140 + 1 = 5041$. Получилось!

Найдем $\sqrt{2809}$.

$50^2 = 2500$, $60^2 = 3600$. Значит, первая цифра в ответе – 5.

В числе 2809 последняя цифра – девятка. $3^2 = 9$, $7^2 = 49$. Значит, последняя цифра в ответе – либо 3, либо 9.

Проверим:

$53^2 = (50 + 3)^2 = 2500 + 300 + 9 = 2809$.

Если число, из которого надо извлечь квадратный корень, заканчивается на 2, 3, 7 или 8 – значит, квадратный корень из него будет числом иррациональным. Потому что ни один квадрат целого числа не заканчивается на 2, 3, 7 или 8.

Помните, что в задачах части 1 на ЕГЭ ответ должен быть записан в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Это значит, что ответ – рациональное число[1].

[1] О том, какие числа называются натуральными, целыми, дробными, рациональными, подробно рассказано в следующей главе.

7. Квадратные уравнения часто встречаются нам в задачах ЕГЭ базового уровня. В них нужно считать дискриминант, а затем извлекать из него корень. И совсем не обязательно искать корни из пятизначных чисел. Во многих случаях дискриминант удается разложить на множители.

Например, в уравнении

$2x^2 + 90x - 8100 = 0$

$D = 8100 + 8 \cdot 8100 = 8100(1 + 8) = 8100 \cdot 9$

$\sqrt{D} = 90 \cdot 3 = 270,$

8. Иногда дискриминант удается посчитать по известной формуле сокращенного умножения: $a^2 – b^2 = (a – b)(a + b)$.

Вот такое уравнение вполне может получиться при решении текстовой задачи:

$9x^2 - 37x + 4 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 37^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 37^2 - 12^2 = (37 - 12)(37 + 12) = 25 \cdot 49$

$\sqrt{D} = \sqrt{25 \cdot 49} = 5 \cdot 7 = 35$

9. Еще одна ситуация, в которой выражение под корнем можно разложить на множители, взята из задачи по геометрии.

Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 39, один из катетов равен 36. Найти второй катет.

По теореме Пифагора, он равен $\sqrt{39^2 - 36^2}$. Можно долго считать в столбик, но проще применить формулу сокращенного умножения.

$39^2 - 36^2 = (39 - 36)(39 + 36) = 3 \cdot 75 = 3 \cdot 3 \cdot 25$

$\sqrt{3 \cdot 3 \cdot 25} = 3 \cdot 5 = 15$

Главная мысль – ваши вычисления должны быть максимально простыми. Есть известный принцип, применяемый в программировании и дизайне. По-английски он звучит так: «Keep it simple, stupid!»[1] - и легко запоминается как KISS :-)

[1] «Не усложняй, чудило!»

Глава 5. Теория вероятностей на ЕГЭ и привет от Наполеона

Случайным называется событие, которое нельзя точно предсказать заранее. Оно может либо произойти, либо нет.

Вы выиграли в лотерею – случайное событие. Пригласили друзей отпраздновать выигрыш, а они по дороге к вам застряли в лифте – тоже случайное событие. Правда, мастер оказался поблизости и освободил всю компанию через десять минут – и это тоже можно считать счастливой случайностью…

Наша жизнь полна случайных событий. О каждом из них можно сказать, что оно произойдет с некоторой **вероятностью**. Скорее всего, вы интуитивно знакомы с этим понятием. Теперь мы дадим математическое определение вероятности.

Начнем с простых примеров. Вы бросаете монетку. Орел или решка?

Действие, которое может привести к одному из нескольких результатов, в теории вероятностей называют **испытанием**.

Орел и решка – два возможных **исхода** испытания.

Орел выпадет в одном случае из двух возможных. Говорят, что **вероятность** того, что монетка упадет орлом, равна $\frac{1}{2}$.

Бросим игральную кость. У кубика шесть граней, поэтому возможных исходов тоже шесть.

Например, вы загадали, что выпадет три очка. Это один исход из шести возможных. В теории вероятностей он будет называться **благоприятным исходом**.

Вероятность выпадения тройки равна $\frac{1}{6}$ (один благоприятный исход из шести возможных).

Вероятность четверки – тоже $\frac{1}{6}$

А вот вероятность появления семерки равна нулю. Ведь грани с семью точками на кубике нет.

Вероятность события равна отношению числа благоприятных исходов к общему числу исходов.

Очевидно, что вероятность не может быть больше единицы.

Вот другой пример. В пакете 25 яблок (и ничего больше). Из них 8 – красные, остальные – зеленые. Ни формой, ни размером яблоки не отличаются. Вы запускаете в пакет руку и наугад вынимаете яблоко. Вероятность вытащить красное яблоко равна $\frac{8}{25}$, а зеленое – $\frac{17}{25}$.

Вероятность достать красное или зеленое яблоко равна $\frac{8}{25} + \frac{17}{25} = 1$.

Вероятность вытащить из этого пакета банан равна нулю.

Разберем задачи по теории вероятностей, входящие в сборники для подготовки к ЕГЭ.

1. В фирме такси в данный момент свободно 15 машин: 2 красных, 9 желтых и 4 зеленых. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшихся ближе всего к заказчице. Найдите вероятность того, что к ней приедет желтое такси.

Всего имеется 15 машин, то есть к заказчице приедет одна из пятнадцати. Желтых – девять, и значит, вероятность приезда именно желтой машины равна $\frac{9}{15}$, то есть 0,6.

2. В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов, в двух из них встречается вопрос о грибах. На экзамене школьнику достаётся один случайно выбранный билет. Найдите вероятность того, что в этом билете не будет вопроса о грибах.

Очевидно, вероятность вытащить билет без грибов равна $\frac{23}{25}$, то есть 0,92.

3. Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 бадминтонистов, среди которых 10 участников из России, в том числе Роман Орлов. Найдите вероятность того, что в первом туре Роман Орлов будет играть с каким-либо бадминтонистом из России.

Ответ: 0,36.

Если вы получили $\frac{10}{26}$ – значит, у вас Роман Орлов играет в бадминтон сам с собой :-)

4. Ученика попросили назвать число от 1 до 100. Какова вероятность того, что он назовет число кратное пяти?

1, 2, 3, 4, **5**, 6, 7, 8, 9, **10**, 11… **100**

Каждое пятое число из данного множества делится на 5. Значит, вероятность равна $\frac{1}{5}$.

5. Брошена игральная кость. Найдите вероятность того, что выпадет нечетное число очков.

1, 3, 5 – нечетные числа; 2, 4, 6 – четные. Вероятность нечетного числа очков равна $\frac{1}{2}$.

Ответ: 0,5.

6. Монета брошена три раза. Какова вероятность двух «орлов» и одной «решки»?

Заметим, что задачу можно сформулировать по-другому: бросили три монеты одновременно. На решение это не повлияет.

Как вы думаете, сколько здесь возможных исходов?

Бросаем монету. У этого действия два возможных исхода: орел и решка

Две монеты – уже четыре исхода:

орел		решка	
орел	решка	орел	решка

Три монеты? Правильно, 8 исходов, так как $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$.

Вот они:

орел	орел	орел
орел	орел	решка
орел	решка	орел
решка	орел	орел
орел	решка	решка
решка	орел	решка
решка	решка	орел
решка	решка	решка

Два орла и одна решка выпадают в трех случаях из восьми.

Ответ: $\frac{3}{8}$.

7. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков. Результат округлите до сотых.

Бросаем первую кость – шесть исходов. И для каждого из них возможны еще шесть - когда мы бросаем вторую кость. Получаем, что у данного действия – бросания двух игральных костей – всего 36 возможных исходов, так как $6^2 = 36$.

А теперь – благоприятные исходы:

2 6

3 5

4 4

5 3

6 2

Вероятность выпадения восьми очков равна $\frac{5}{36} \approx 0{,}14$.

8. Стрелок попадает в цель с вероятностью 0,9. Найдите вероятность того, что он попадёт в цель четыре раза выстрела подряд.

Если вероятность попадания равна 0,9 – следовательно, вероятность промаха 0,1. Рассуждаем так же, как и в предыдущей задаче. Вероятность двух попадания подряд равна $0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}81$. А вероятность четырех попаданий подряд равна $0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}6561$.

События А и В называют независимыми, если вероятность появления события А не меняет вероятности появления события В. В нашей задаче – так и есть: результат каждого выстрела не зависит от предыдущих.

Для нескольких независимых событий вероятность того, что все они произойдут, равна произведению вероятностей.

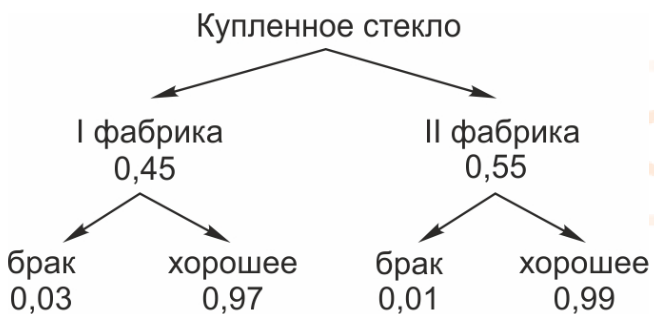
Значит, вероятность четырех попаданий подряд равна $0,9^4 = 0,6561$.

А если изменить условие? Что, если надо найти вероятность трех попаданий и одного промаха? Вероятность промаха равна 0,1. Значит, вероятность трех попаданий и одного промаха $0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,1 = 0,0729$.

9. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Решение:

Изобразим все возможные исходы.



По условию, купленное в магазине стекло для автомобильной фары оказалось бракованным. Как это могло получиться?

Стекло сделано либо на первой фабрике, либо на второй. Эти события несовместны.

Вероятность того, что стекло с первой фабрики, равна 0,45.

Вероятность того, что стекло сделано на второй фабрике, равна 0,55.

Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол. Значит, с вероятностью 0,03 стекло, произведенное на первой фабрике, бракованное.

Вторая фабрика выпускает 1% бракованных стекол. Значит, с вероятностью 0,01 сделанное на ней стекло бракованное.

Покупатель купил бракованное стекло. Оно могло быть сделано на первой фабрике и оказалось бракованным. Это означает одновременное наступление, или произведение, двух независимых случайных событий – «стекло сделано на первой фабрике» и «стекло бракованное». Вероятность произведения этих двух событий равна $0,45 \cdot 0,03$.

Или другой случай. Стекло могло быть со второй фабрики и также бракованное. Вероятность одновременного наступления этих двух событий равна 0,55 · 0,01. События «стекло с первой фабрики» и «стекло со второй фабрики» несовместны – они не могут случиться одновременно.

Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей.

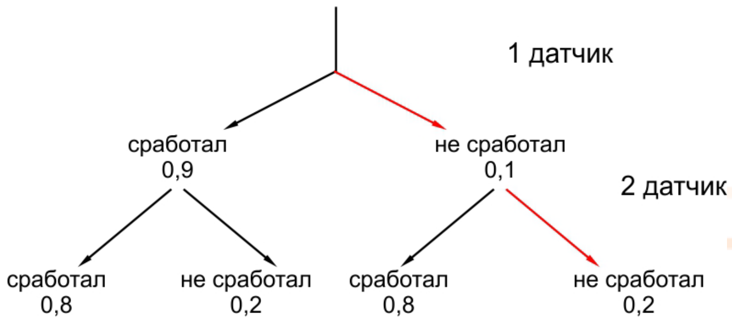
Значит, вероятность купить бракованное стекло равна:

0,45 · 0,03 + 0,55· 0,01 = 0,019.

Ответ: 0,019.

10. Склад оборудован двумя датчиками сигнализации различной конструкции, которые подают звуковой сигнал, если в помещение проникает посторонний. Вероятность выхода из строя в течение года для первого датчика равна 0,1 и второго 0,2. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы один датчик сигнализации останется исправным.

Как всегда в таких задачах, нарисуем схему возможных исходов.



Нам подходят все исходы, кроме одного – когда в течение года сломались оба датчика. Вероятность этого, неблагоприятного для нас исхода, равна $0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02$.

Вероятность благоприятного исхода (хотя бы один датчик сработал) равна $1 - 0{,}02 = 0{,}98$.

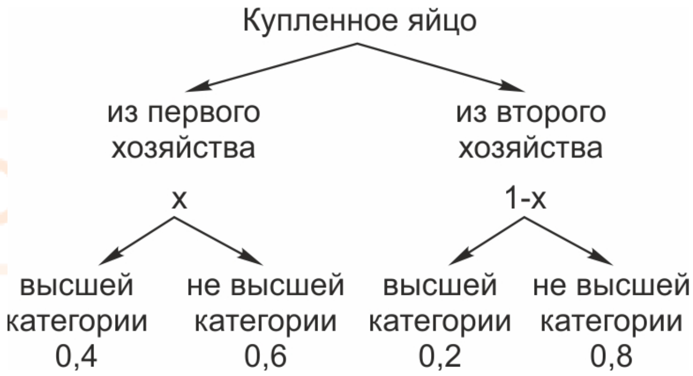
Ответ: 0,98

11. Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 40% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 20% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 35% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Решение:

Нарисуем все возможные исходы ситуации. Покупатель пришел в магазин, который принадлежит агрофирме, и купил яйцо. Надо найти вероятность того, что это яйцо из первого хозяйства.

Яйца могут быть только или из первого домашнего хозяйства, или из второго, причем эти два события несовместны. Других яиц в этот магазин не поступает.



Пусть вероятность того, что купленное яйцо из первого хозяйства, равна x. Тогда вероятность того, что яйцо из второго хозяйства (противоположного события), равна 1-x.

Яйца могут быть высшей категории и не высшей.

В первом хозяйстве 40% яиц имеют высшую категорию, а 60% - не высшую. Это значит, что случайно выбранное яйцо из первого хозяйства с вероятностью 40% будет высшей категории. Во втором хозяйстве 20% яиц высшей категории, а 80% - не высшей.

Пусть случайно выбранное в магазине яйцо - из первого хозяйства и высшей категории. Вероятность этого события равна произведению вероятностей: 0,4 x.

Вероятность того, что яйцо из второго хозяйства и высшей категории, равна 0,2 (1-x).

Если мы сложим эти две вероятности, мы получим вероятность того, что яйцо имеет высшую категорию. По условию, высшую категорию имеют 35% яиц, значит, эта вероятность равна 0,35.

Мы получили уравнение:

$0{,}4x + 0{,}2(1 - x) = 0{,}35.$

Решаем это уравнение и находим, что x = 0,75 – вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, оказалось из первого хозяйства.

Ответ: 0,75

12. За круглый стол на 9 стульев в случайном порядке рассаживаются 7 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки будут сидеть рядом.

Решим задачу простым способом – без применения формул комбинаторики.

Пусть одна из девочек заняла место за круглым столом. Тогда за столом остается 8 свободных мест. Вторая девочка может занять место слева или справа от первой, то есть благоприятных исходов два. Значит, вероятность того, что обе девочки сидят рядом, равна $\frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

Ответ: 0,25

А что делать, если все-таки что-то вам непонятно?

Напомним – вы всегда можете подойти за помощью к учительнице. Это ваше право. Показывайте конкретную строчку в условии или решении и говорите, обращаясь по имени-отчеству: «Пожалуйста, объясните, как это делать». Для нее такое объяснение – дело пятнадцати минут, а для вас – важный шаг в освоении математики.

Другой способ – мой Онлайн-курс подготовки к ЕГЭ на 100 баллов.

Больше тысячи абитуриентов уже подготовились по нему к ЕГЭ, сдали на отлично и стали студентами.

Теперь еще два слова о задачах.

Знаете ли вы, что каждая задача, с которой вы справились, – это еще и тренировка внимания?!

Я много раз наблюдала, как старшеклассники, решая задачу, забывают о том, что же они вообще ищут!

Или читают условие раз, другой и третий подряд, упорно «не замечая» какое-нибудь значимое слово.

Не всегда умеют (или – не хотят) говорить полными предложениями, с подлежащим, сказуемым и дополнениями, и выражают свою мысль примерно так: «Это на это плюс это на это». А с вами такое случается?

Учитесь говорить, друзья мои! Вы заметили, что в школе почти нет устных экзаменов? Подсчитано, что за весь учебный день – шесть-восемь уроков – у вас есть в среднем две минуты для устных ответов! А ведь не зря Наполеон Бонапарт сказал: «Кто не умеет говорить – карьеры не сделает».

Глава 6. Теория вероятностей: повышенный уровень сложности

В варианте ЕГЭ по математике Профильного уровня не одна, а целых две задачи по теории вероятностей, причем вторая – повышенной сложности. В ней вам встретится и условная вероятность, и формула Бернулли, и вероятности сложных событий.

Чтобы быть в курсе всех изменений Профильного ЕГЭ по математике – присоединяйтесь к Онлайн-курсам Анны Малковой.

1. Вероятность того, что клиент банка не вернет кредит, в период экономического роста равна 0,04, а в период экономического кризиса 0,2. Вероятность начала экономического кризиса оценивается в 0,45. Чему равна вероятность того, что клиент не вернет кредит?

Решение:

Как обычно, рисуем «дерево» возможных исходов. По условию задачи, экономический кризис начнется с вероятностью 0,45. С вероятностью 0,55 будет экономический рост.

Вероятность того, что клиент не вернет кредит, равна $0{,}55 \cdot 0{,}04 + 0{,}45 \cdot 0{,}2 = 0{,}112.$

Ответ: 0,112

2. Чтобы поступить в институт на специальность «Лингвистика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 69 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Коммерция», нужно набрать не менее 69 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и обществознание.

Вероятность того, что абитуриент А. получит не менее 69 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку — 0,6, по иностранному языку — 0,6 и по обществознанию — 0,9.

Найдите вероятность того, что А. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

Решение:

Для того, чтобы поступить хотя бы на одну из этих специальностей, необходимо сдать и русский, и математику не менее чем на 69 баллов.

События «сдать ЕГЭ по математике не ниже, чем на 69 баллов» и «сдать ЕГЭ по русскому языку не ниже, чем на 69 баллов» независимы. Вероятность их произведения (то есть наступления и того, и другого события) равна произведению их вероятностей: $P_1 = 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}36$.

Помимо этого, нужно сдать иностранный язык (И) или обществознание (О) не менее, чем на 69 баллов. Обозначим вероятность этого события P_2.

События «сдать ЕГЭ по иностранному не ниже, чем на 69 баллов» и «сдать ЕГЭ по обществознанию не ниже, чем на 69 баллов» совместны – то есть может произойти и то, и другое.

Поэтому вероятность события «сдать не ниже 69 баллов ЕГЭ по иностранному или по обществознанию» $P_2 = P(И) + P(O) - P(И \cdot O) = 0{,}6 + 0{,}9 - 0{,}54 = 0{,}9 + 0{,}06 = 0{,}96$.

Вероятность того, что набраны баллы для поступления или на специальность «Лингвистика», или на специальность «Коммерция», или на обе этих специальности, равна $P_1 \cdot P_2 = 0{,}36 \cdot 0{,}96 = 0{,}3456$.

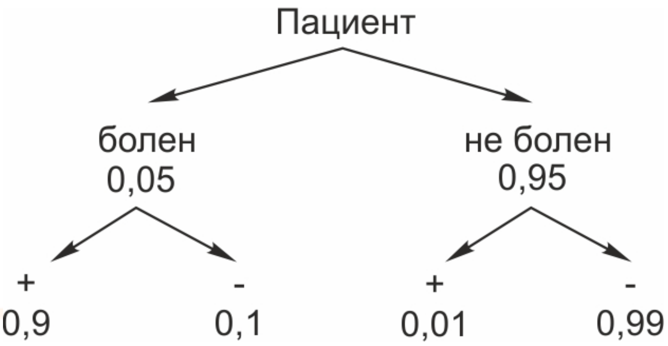
Ответ: $0{,}3456$.

3. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется положительным. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 5% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

Решение:

С чем пришел пациент в клинику? – С подозрением на гепатит. Возможно, он действительно болен гепатитом, а возможно, у его плохого самочувствия другая причина. Может быть, он просто съел что-нибудь. Вероятность того, что он болен гепатитом, равна 0,05 (то есть 5%). Вероятность того, что он здоров, равна 0,95 (то есть 95%).

Пациенту делают анализ. Покажем на схеме все возможные исходы:



Если он болен гепатитом, анализ дает положительный результат с вероятностью 0,9. То есть анализ покажет: «есть гепатит».

Заметим, что анализ не во всех случаях выявляет гепатит у того, кто действительно им болен. С вероятностью 0,1 анализ не распознает гепатит у больного.

Более того. Анализ может ошибочно дать положительный результат у того, кто не болеет гепатитом. Вероятность такого ложного положительного результата 0,01. Тогда с вероятностью 0,99 анализ даст отрицательный результат, если человек здоров.

Найдем вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

Благоприятные для этой ситуации исходы: человек болен, и анализ положительный (вероятность одновременного наступления этих двух событий равна $0{,}05 \cdot 0{,}9$), или человек здоров, и анализ ложный положительный (вероятность одновременного наступления этих двух событий равна $0{,}95 \cdot 0{,}01$). Так как события «человек болен» и «человек не болен» несовместны, то вероятность того, что результат анализа будет положительным, равна $0{,}05 \cdot 0{,}9 + 0{,}95 \cdot 0{,}01 = 0{,}0545$

Ответ: 0,0545.

4. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение:

Вероятность того, что кофе в автомате остался к концу дня, обозначим «плюсом». Вероятность того, что кофе в автомате закончился – «минусом».

Вероятность того, что кофе закончился, равна 0,3 и для одного, и для другого автомата.

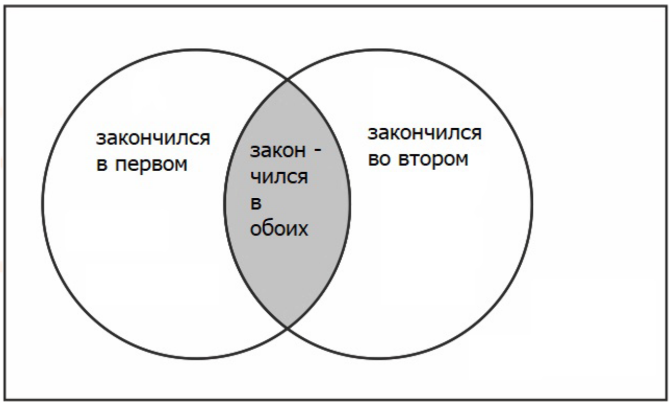
	+	-
I автомат	0,7	0,3
II автомат	0,7	0,3

Но что мы видим? Вероятность того, что кофе закончился в обоих автоматах, равна не 0,09, как мы могли бы предположить, а 0,12 - по условию задачи.

В чем же дело?

Если кофе закончился в одном автомате, значит, все, кто хочет кофе, пойдут по второму, и в нем кофе выпьют уже быстрее. Получается, что события «кофе закончился в первом автомате» и «кофе закончился во втором» являются **зависимыми**, и вероятность произведения этих событий считается уже по-другому.

Найдем вероятность того, что кофе закончится хотя бы в одном из автоматов. Он может закончиться в первом, во втором или в обоих сразу, и тогда, чтобы найти вероятность того, что кофе останется в обоих, мы из единицы вычтем вероятность того, что кофе закончился хотя бы в одном из автоматов.



Вероятность того, что кофе закончится хотя бы в одном автомате, равна сумме вероятностей того, что кофе закончится в первом автомате, плюс вероятность того, что кофе закончился во втором, минус вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах сразу.

Так же мы считали бы площадь фигуры на данном рисунке. Мы бы сложили площадь первого круга и площадь второго, а затем вычли площадь их пересечения, поскольку она посчитана дважды.

Вероятность того, что кофе закончится хотя бы в одном автомате:

$P_1 = 0{,}3 + 0{,}3 - 0{,}12 = 0{,}48$

Тогда вероятность того, что кофе останется в обоих автоматах

$P_2 = 1 - 0{,}48 = 0{,}52.$

Ответ: 0,52.

5. Ведущий конкурса предлагает троим участникам задумать любую цифру от 0 до 9. Считая, что выбор каждым из участников любой цифры равновероятен, найти вероятность того, что у кого-то из них задуманные цифры совпадут.

Решение:

Запишем возможные исходы в виде упорядоченных троек чисел, которые задумали первый, второй и третий участники. Благоприятные для нас исходы – когда хотя бы 2 цифры совпадают.

Всего, очевидно, $10^3 = 1000$ возможных исходов.

Рассмотрим случаи, когда первый задумал цифру 0.

(0, 0,0) (0,0, 1) (0, 0, 2) … (0, 0, 9) – 10 исходов, все благоприятные (две цифры 0)

(0, 1, 0) (0, 1, 1) (0, 1, 2) … (0, 1, 9) – 10 исходов, из них 2 благоприятных: (0, 1, 0) и (0, 1, 2).

(0, 2, 0) (0, 2, 1) (0, 2, 2) … (0, 2, 9) – 10 исходов, 2 благоприятных.

Аналогично, для случаев, когда первый задумал 0, а второй – цифру от 3 до 9, получаем по 2 благоприятных исхода из 10, всего 10 + 2*9 = 28 благоприятных исходов.

Для случаев, когда первый задумал цифру от 1 до 9, также получаем по 28 благоприятных исходов. Значит, всего 280 благоприятных исходов из 1000 возможных.

$p = \frac{280}{1000} = 0{,}28$

Ответ: 0,28

6. В коробке 10 синих, 9 красных и 6 зеленых фломастеров. Случайным образом выбирают 2 фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?

Решение:

Всего в коробке 25 фломастеров.

В условии не сказано, какой из фломастеров вытащили первым – красный или синий.

Предположим, что первым вытащили красный фломастер. Вероятность этого $\frac{9}{25}$, в коробке остается 24 фломастера, и вероятность вытащить вторым синий равна $\frac{10}{24}$. Вероятность того, что первым вытащили красный, а вторым синий, равна $\frac{9}{25} \cdot \frac{10}{24} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$.

А если первым вытащили синий фломастер? Вероятность этого события равна $\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$. Вероятность после этого вытащить красный равна $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$. вероятность того, что синий и красный вытащили один за другим, равна $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{20}$.

Значит, вероятность вытащить первым красный, вторым синий или первым синий, вторым красный равна $\frac{3}{20} + \frac{3}{20} = 0{,}3$.

А если их доставали из коробки не один за другим, а одновременно? Вероятность остается такой же: 0,3. Потому что она не зависит от того, вытащили мы фломастеры один за другим, или с интервалом в 2 секунды, или с интервалом в 0,5 секунды… или одновременно! Ответ: 0,3.

7. Телефон передает sms-сообщение. В случае неудачи телефон делает следующую попытку. Вероятность того, что сообщение удастся передать без ошибок в каждой следующей попытке, равна 0,4. Найдите вероятность того, что для передачи сообщения потребуется не больше 2 попыток.

Решение:

Здесь все просто. Либо сообщение удалось передать с первой попытки, либо со второй.

Вероятность того, что сообщение удалось передать с первой попытки, равна 0,4.

С вероятностью 0,6 с первой попытки передать не получилось. Если при этом получилось со второй, то вероятность этого события равна $0{,}6 \cdot 0{,}4$.

Значит, вероятность того, что для передачи сообщения потребовалось не более 2 попыток, равна $0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}4 \cdot (1 + 0{,}6) = 0{,}64$.

Ответ: 0,64

8. В одном ресторане в г. Тамбове администратор предлагает гостям сыграть в «Шеш-беш»: гость бросает одновременно 2 игральные кости. Если он выбросит комбинацию 5 и 6 очков хотя бы один раз из двух попыток, то получит комплимент от ресторана: чашку кофе или десерт бесплатно. Какова вероятность получить комплимент? Результат округлите до сотых.

Решение:

Ресторан «Шеш-Беш» должен сказать составителям задачи спасибо: теперь популярность вырастет во много раз :-)

Заметим, что условие не вполне корректно. Например, я бросаю кости и при первом броске получаю 5 и 6 очков. Надо ли мне бросать второй раз? Могу ли я получить 2 десерта, если дважды выброшу комбинацию из 5 и 6 очков?

Поэтому уточним условие. Если при первом броске получилась комбинация из 5 и 6 очков, то больше кости я не бросаю и забираю свой десерт (или кофе).

Если первый раз не получилось – у меня есть вторая попытка.

Решим задачу с учетом этих условий.

При броске одной игральной кости возможны 6 исходов, при броске 2 костей 36 исходов. Только два из них благоприятны: это 5; 6 и 6; 5, вероятность каждого из них равна $\frac{1}{36}$. Вероятность выбросить 5 и 6 при первом броске равна $\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$.

Вероятность того, что с первой попытки не получилось, равна $1-\frac{1}{18}=\frac{17}{18}$.

Если в первый раз не получилось выбросить 5 и 6, а во второй раз получилось – вероятность этого события равна $\frac{17}{18}\cdot\frac{1}{18}$.

Вероятность выбросить 5 и 6 с первой или со второй попытки равна $\approx 0{,}11$.

Ответ: 0,11

9. Игральную кость бросили один или несколько раз. Оказалось, что сумма всех выпавших очков равна 4. Какова вероятность того, что был сделан один бросок? Ответ округлите до сотых.

Решение:

Рассмотрим возможные варианты. Игральную кость могли бросить: 1 раз, выпало 4 очка. Вероятность этого события равна $\frac{1}{6}$ (1 благоприятный исход из 6 возможных). При этом, если получили 4 очка, кость больше не бросаем.

2 раза, выпало 3 и 1 или 1 и 3 или 2 и 2. При этом, если получили 4 очка, больше не бросаем кость. Для 2 бросков: всего 36 возможны исходов, из них 3 благоприятных, вероятность получить 4 очка равна $\frac{3}{36}$.

3 раза, выпало 1, 1, 2 или 1, 2, 1 или 2, 1, 1. Если получили 4 очка – больше не бросаем кость. Для 3 бросков: всего $6^3=216$ возможны исходов, из них 3 благоприятных, вероятность получить 4 очка равна $\frac{3}{216}$.

4 раза, каждый раз по 1 очку. Вероятность этого события равна $\frac{1}{6^4}$.

Вероятность получить 4 очка равна

Воспользуемся формулой условной вероятности.

Пусть P_1 — вероятность получить 4 очка, сделав 1 бросок; $P_1=\frac{1}{6}$ (для одного броска: 6 возможных исходов, 1 благоприятный);

P — вероятность получить 4 очка с одной или нескольких попыток, $P=\frac{7^3}{6^4}$.

P_2 — вероятность, что при этом был сделан только один бросок;

$P_1=P\cdot P_2$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{7^3}{6^3} \cdot P_2$$

$$P_2 = \frac{6^3}{7^3} = \frac{216}{343} \approx 0{,}63$$

Ответ: 0,63

Глава 7. Числовые множества. Корни и степени

Знаете ли вы, какие бывают числа?

ЕГЭ по математике – экзамен практический. Однако основные математические понятия надо знать четко. Поэтому – небольшая лекция, специально для гуманитариев :-)

Первые числа, которыми люди начали пользоваться в доисторические еще времена, - **натуральные**, то есть целые и положительные: 1, 2, 3. . . Натуральные числа применяются для счета предметов. Они могут быть использованы в качестве номеров.

Число ноль не является натуральным. В самом деле, вряд ли вы скажете: «В комнате сидит ноль человек» :-)

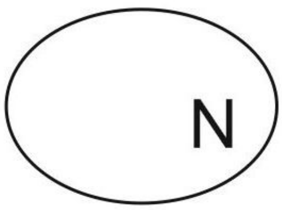
Наименьшее натуральное число - единица. Числа 15, 475, 98764 - натуральные. Все вместе они составляют **множество** натуральных чисел, обозначаемое буквой N.

Что такое множество? Это одно из **первичных** понятий математики, то есть таких, которые лежат в основе логической системы и уже не определяются через другие понятия. Попробуйте объяснить, что такое точка.

Или - что такое время? Ни один человек в мире еще не дал ответа на этот вопрос!

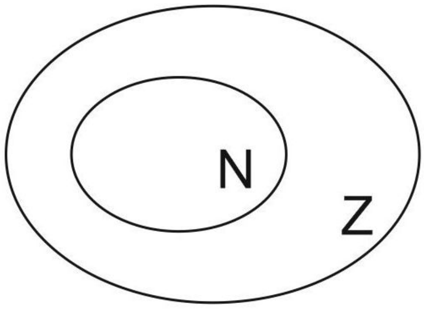
Время, точка, множество – примеры первичных понятий.

Интуитивно мы понимаем, что множество - это набор или совокупность элементов, объединенных каким-либо общим признаком. Множества обычно обозначаются заглавными буквами. Множество натуральных чисел мы условно изобразим вот так – как будто все натуральные числа поместили внутрь нарисованного овала:



Конечно же, числа бывают не только натуральными. Тысячи лет назад индийцы открыли (или изобрели) число ноль и отрицательные числа. Теперь они для нас привычны. Проверьте баланс своего мобильного телефона. Он может быть положительным, отрицательным или нулевым. А когда-то европейцы - древние греки и римляне - долгое время обходились без нуля. Сейчас нам трудно это представить, не правда ли?

Натуральные числа, целые отрицательные числа и ноль вместе составляют множество целых чисел, которое обозначается Z:



Обратите внимание, что множество целых чисел включает в себя множество натуральных.

Кроме целых чисел, есть еще и дроби. Напомним, что дробь — это часть, доля, выражение вида $\frac{p}{q}$, где p — целое, а q — натуральное. Например, $\frac{1}{7}$ — это одна часть из семи, 0,25 — это двадцать пять сотых. Десятичные дроби также можно записать в виде $\frac{p}{q}$. Об этом мы говорили в самом начале книги, в первой главе. Например, $0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.

Целые числа (положительные и отрицательные) также можно записать в виде $\frac{p}{q}$ — хотя бы в виде дроби со знаменателем 1:

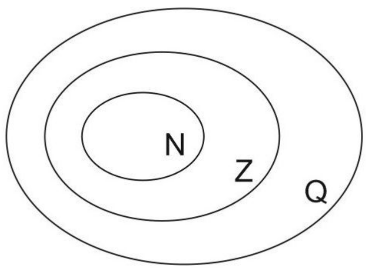
$2 = \frac{2}{1}$;

$0 = \frac{0}{1}$;

$-5 = -\frac{5}{1}$.

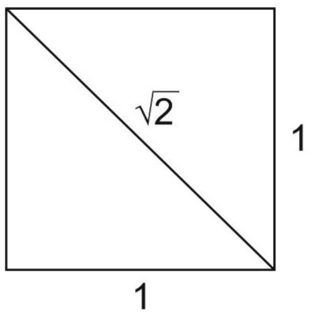
Все числа, которые можно записать в виде дроби $\frac{p}{q}$, называются **рациональными.**

$4;\ -1{,}2;\ \frac{7}{8};\ 1{,}26$ – примеры рациональных чисел. Множество рациональных чисел обозначается Q. Ясно, что оно включает в себя множество целых чисел.



Хорошо, но любое ли число можно записать в виде дроби $\frac{p}{q}$? Иными словами, все ли числа являются рациональными? Долгое время (в античности) считалось, что любое число можно записать в виде дроби с числителем и знаменателем. Дело в том, что для древних греков числа и их соотношения были почти священны. Пифагорейцы говорили: «Числа правят миром». Они верили, что все основные принципы мироздания можно выразить языком математики, что соотношения чисел определяют гармонию, закон и порядок природы, перед которым склоняют голову даже олимпийские боги. Греческое искусство, особенно архитектура, подчинялось правилам, канонам. Греки точно установили, какими должны быть пропорции в архитектуре - например, отношение диаметра колонны к ее длине, - чтобы здание было гармоничным. И все эти пропорции были отношениями целых чисел.

Но однажды в стройной и гармоничной системе божественных пропорций наметилась досадная брешь. Оказалось, что если нарисовать квадрат со стороной 1, его диагональ не выражается никакой дробью вида $\frac{p}{q}$.



$a^2 + b^2 = c^2$

По теореме Пифагора диагональ такого квадрата равна $\sqrt{2}$, то есть положительному числу, квадрат которого равен двум. Можно доказать, что это число не является рациональным. Но сами пифагорейцы не сразу смогли смириться с тем, что $\sqrt{2}$ невозможно записать в виде $\frac{p}{q}$ - ведь это наносило удар всей их философской системе!

Открытие долго держалось в тайне, пока наконец ученик Пифагора Гиппас не разгласил его. За это Гиппас был изгнан из школы Пифагора, бежал из города и утонул во время кораблекрушения. Греки увидели в этом возмездие богов и решили, что от таких чисел, как $\sqrt{2}$, лучше держаться подальше. Числа, которые невозможно записать в виде $\frac{p}{q}$, такие, как $\sqrt{2}$, назвали **иррациональными**, то есть не-разумными, неправильными.

Но иррациональные числа ничуть не хуже рациональных! Они отнюдь не ограничиваются выражениями вида $\sqrt{2}$ или $\sqrt{3}$. К иррациональным относятся также

- число π - отношение длины окружности к ее диаметру;

- число e, названное в честь Эйлера (об этом числе вы узнаете, изучая функции и производные);

- задающее золотое сечение число ϕ - удивительное число Фибоначчи, вокруг которого построен весь детективный сюжет фильма «Код да Винчи»;

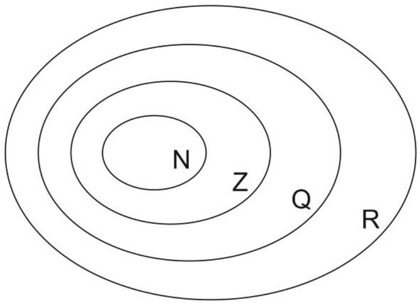
- числа вида $\log_2 5$, $\sin 23°$;

- необозримое количество других чисел.

Давайте еще раз повторим, в чем разница между рациональными и иррациональными числами. Рациональное число можно представить в виде дроби $\frac{p}{q}$, например, $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{11}$. А если мы просто поделим в столбик 7 на 11 - обнаружим интересную закономерность:

$7 : 11 = 0{,}636363636363\ldots$

Мы видим, что цифры повторяются, то есть дробь является **периодической**. Таким образом, любое рациональное число можно записать в виде десятичной дроби - конечной или бесконечной периодической. А вот в числе π цифры не заканчиваются и не повторяются. Иррациональные числа - это бесконечные **непериодические** дроби. Вместе оба множества - рациональных и иррациональных чисел - образуют множество **действительных** (или вещественных) чисел, которое обозначается R (от слова real).



Как вы думаете – это всё? Все ли числа, какие только могут быть, содержатся в множестве действительных чисел? Или за его пределами еще что-то есть?

Для успешной сдачи ЕГЭ других чисел не нужно. Да и вроде мы назвали все возможные. Или нет?

О том, что же находится за пределами множества действительных чисел, вы можете прочитать в статье «Числовые множества» на моем сайте. Это образовательный портал, где вы найдете полный курс подготовки к ЕГЭ по математике, видеокурсы по математике и другим предметам и очень много полезной информации. Заходите!

А мы продолжаем знакомство с понятиями «корни» и «степени». В этой главе будет много нового для вас теоретического материала. Формулы учите сразу. Через некоторое время вы привыкнете к ним, как к таблице умножения.

Запомним терминологию:

Степенью называется выражение вида a^c.

Число a - **основание** степени, число c – **показатель** степени.

По определению, $a^1 = a$.

$a^2 = a \cdot a$ (число a умножается само на себя два раза)

$a^3 = a \cdot a \cdot a$ (число a умножается само на себя три раза)

Как вы думаете, сколько раз число a надо умножить само на себя, чтобы получить a^{25}?

Для любого натурального, то есть целого положительного показателя n, выражение a^n равно

$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots\ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$

Показатель степени может быть не только натуральным (то есть целым положительным), но и равным нулю, а также целым отрицательным.

По определению, $\boldsymbol{a^0 = 1}$.

Это верно для $a \neq 0$. Выражение 0^0 не определено.

Определим также, что такое степень с целым отрицательным показателем.

$a^{-1} = \frac{1}{a}$,

$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Конечно, все это верно для $a \neq 0$, поскольку на ноль делить нельзя.

Например,

$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$;

$(-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = -\frac{1}{27}$;

$2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$;

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$;

$0{,}01^{-1} = \left(\frac{1}{100}\right)^{-1} = 100$;

$\left(\frac{2}{7}\right)^{-1} = \frac{7}{2}$.

Заметили? **При возведении в минус первую степень дробь переворачивается**.

$\left(\frac{5}{3}\right)^{-2} = 1 : \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$.

Показатель степени бывает еще и **дробным,** то есть рациональным числом. Помните, чуть раньше мы говорили, что рациональными называются числа, которые можно записать в виде дроби $\frac{p}{q}$, где p – целое, q - натуральное.

По определению,

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

Это верно при условии $a > 0$.

У нас появилось новое обозначение – корень **n-ной степени.** Поговорим о нем более подробно. Начнем с уже знакомого вам **арифметического квадратного корня**. Он обозначается так: $\sqrt{a}$.

Давайте вспомним, что корень из a - это такое неотрицательное число, квадрат которого равен a.

Если записать кратко,

$\sqrt{a}$ - такое число, что $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, $\sqrt{a} \geq 0$.

Выражение $\sqrt{a}$ определено для $a \geq 0$.

Например, $\sqrt{25} = 5$; $\sqrt{256} = 16$; $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$; $\sqrt{1} = 1$. В этом случае мы говорим, что **извлекли** корень из числа.

Свойства арифметического квадратного корня:

$\sqrt{a} \geq 0$

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

А вот выражение $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ **не равно** $\sqrt{a+b}$. Легко проверить:

$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7,$

$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ – получился другой ответ.

Многие школьники говорят: «Избавились от корня». Мне совсем не нравится это выражение. Оно некорректно. Как именно избавились? Стерли ластиком? Выкинули в окно? – Непонятно! Более грамотно - сказать, что мы упростили выражение, **извлекли** корень.

Конечно же, число $\sqrt{a}$ не для каждого a будет целым или рациональным. Мы уже говорили, что $\sqrt{2}$, например, - число иррациональное. Его не запишешь в виде обыкновенной дроби. Калькулятор дает приближенный, округленный ответ.

$\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots \approx 1{,}41.$

$\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{13}$ – тоже иррациональные числа. Ни одно из них нельзя записать в виде целого числа или обыкновенной дроби.

А что такое кубический корень, то есть $\sqrt[3]{a}$, как вы думаете? Правильно – такое число, которое при возведении в третью степень дает число a.

$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = a.$

Например, $\sqrt[3]{8} = 2$, так как $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$;

$\sqrt[3]{1000} = 10$, так как $10^3 = 1000$;

$\sqrt[3]{-\frac{1}{125}} = -\frac{1}{5}$, так как $\left(-\frac{1}{5}\right)^3 = -\frac{1}{125}$.

Обратите внимание, что корень третьей степени можно извлекать как из положительных, так и из отрицательных чисел.

Аналогично, корень четвертой степени из a – такое число, что $\left(\sqrt[4]{a}\right)^4 = a$. Да и вообще для любого целого n выражение $\boldsymbol{\sqrt[n]{a}}$ **– такое число, что** $\boldsymbol{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a}$**.**

Заметим, что корень третьей, седьмой, двадцать первой - словом, любой нечетной степени, - можно извлекать из любых чисел - положительных, отрицательных чисел или нуля.

Квадратный корень, а также корень четвертой, десятой, в общем, любой четной степени можно извлекать только из неотрицательных чисел.

Найдите значение выражения. Ответ запишите в виде десятичной дроби:

1. $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2.$

2. $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3.$

3. $\sqrt[3]{0{,}001} = \sqrt[3]{0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1} = 0{,}1.$

4. $\sqrt[4]{\frac{1}{625}} = \sqrt[4]{\frac{1}{5^4}} = \frac{1}{5}.$

5. $\sqrt[7]{(-128)} = \sqrt[7]{-1 \cdot 2^7} = -2.$

6. $\sqrt[3]{-\frac{1}{125}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{5^3}} = -\frac{1}{5}.$

Решите уравнение:

7. $\sqrt{\frac{6}{4x-54}} = \frac{1}{7}$

Это задание из варианта ЕГЭ. Что нужно сделать, как вы считаете? «Избавиться от корня»? Но это выражение некорректно. Как избавиться-то? На самом деле надо **возвести в квадрат** обе части уравнения. Ведь выражение под корнем в данном случае – такое число, квадрат которого равен $\frac{1}{7}$.

Возведём обе части в квадрат:

$$\frac{6}{4x-54} = \frac{1}{49}$$

Решим пропорцию:

$4x - 54 = 6 \cdot 49;$

$4x = 348;$

$x = 87.$

8. $\sqrt{\frac{2x+5}{3}} = 5$

$\frac{2x+5}{3} = 25;$

$2x + 5 = 75;$

$x = 35.$

9. $\sqrt{-72 - 17x} = -x$

Если уравнение содержит два корня, в ответ запишите меньший из них. (Так сказано в условии задачи).

Возведем обе части в квадрат:

$-72 - 17x = (-x)^2$

$-72 - 17x = x^2$

$x^2 + 17x + 72 = 0$

Корни уравнения: $x_1 = -8$; $x_2 = -9$. Проверка показывает, что оба корня подходят. В ответ записываем меньший из них, как и требовалось в условии.

Ответ: -9.

10. $\sqrt[3]{x-4} = 3$

Как вы думаете, в какую степень надо возвести обе части уравнения?

Возводим в куб обе части.

$x - 4 = 3^3$

$x - 4 = 27$

$x = 31.$

Корни и степени – две взаимосвязанные темы. Корни можно записывать в виде степеней. Это удобно.

По определению,

$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a};$

$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a};$

в общем случае $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$**.**

Сразу договоримся, что основание степени $a > 0$.

Например,

$25^{\frac{1}{2}} = 5$

$8^{\frac{1}{3}} = 2$

$81^{\frac{1}{4}} = 3$

$100000^{\frac{1}{5}} = 10$

$0{,}001^{\frac{1}{3}} = 0{,}1.$

Выражение $a^{\frac{m}{n}}$ по определению равно $\sqrt[n]{a^m}$. При этом также выполняется условие $a > 0$.

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$

Например,

$8^{\frac{4}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^4 = 2^4 = 16;$

$a^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{a^3};$

$b^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{b^2}}$.

Запомним правила действий со степенями:

$a^n a^m = a^{m+n}$ - при перемножении степеней показатели складываются

$\frac{a^n}{a^m} = a^{\text{n-m}}$ - при делении степени на степень показатели вычитаются

$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{\text{min}}$ - при возведении степени в степень показатели перемножаются

$a^n b^n = (ab^n)^n$

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

А теперь - практические задания из вариантов ЕГЭ. В них надо упростить выражения с корнями и степенями. Считаем без калькулятора! Обратите внимание на приемы, которыми мы пользуемся.

11. $\frac{\sqrt{2,8}\cdot\sqrt{4,2}}{\sqrt{0,24}} = \sqrt{\frac{2,8\cdot 4,2}{0,24}} = \sqrt{\frac{28\cdot 42}{24}} = \sqrt{\frac{7\cdot 4\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 6}} = \sqrt{7\cdot 7} = 7$

Внесли все под общий корень, разложили на множители, сократили дробь и извлекли корень.

12. $\frac{(2\sqrt{7})^2}{14} = \frac{2^2\cdot(\sqrt{7})^2}{14} = \frac{4\cdot 7}{14} = 2.$

13. $\frac{\sqrt[9]{7}\cdot\sqrt[18]{7}}{\sqrt[6]{7}}$

Запишите корни в виде степеней. Это намного удобнее.

$\frac{\sqrt[9]{7}\cdot\sqrt[18]{7}}{\sqrt[6]{7}} = \frac{7^{\frac{1}{9}}\cdot 7^{\frac{1}{18}}}{7^{\frac{1}{6}}} = 7^{\frac{1}{9}+\frac{1}{18}-\frac{1}{6}} = 7^{\frac{1}{6}-\frac{1}{6}} = 7^0 = 1.$

14. $\left(\frac{2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[12]{2}}\right)^2$

Запишите корень в знаменателе в виде степени и аккуратно примените правила действий со степенями. Две следующих задачи решаются аналогично.

$\left(\frac{2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[12]{2}}\right)^2 = \left(2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}}\right)^2 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2.$

15. $5\cdot\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[6]{9}$

$5\cdot\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[6]{9} = 5\cdot 9^{\frac{1}{3}}\cdot 9^{\frac{1}{6}} = 5\cdot 9^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 5\cdot 9^{\frac{1}{2}} = 5\cdot\sqrt{9} = 5\cdot 3 = 15.$

16. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt[9]{m}\cdot\sqrt[18]{m}}$ *при* $m = 64$*.*

$\frac{\sqrt{m}}{\sqrt[9]{m}\cdot\sqrt[18]{m}} = \frac{m^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{9}}\cdot m^{\frac{1}{18}}} = m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{18}} = m^{\frac{1}{3}}.$

Если $m = 64$, то $m^{\frac{1}{3}} = 4$.

17. $5^{0,36}\cdot 25^{0,32}$

Приведите степени к одному основанию. Выбирайте самое простое. В данном случае это основание 5.

$5^{0,36}\cdot 25^{0,32} = 5^{0,36}\cdot 5^{0,64} = 5^{0,36+0,64} = 5^1 = 5$

18. $35^{-4,7}\cdot 7^{5,7}: 5^{-3,7}$

Разложите число 35 на множители. Запишите выражение в виде дроби и сократите ее.

$35^{-4,7}\cdot 7^{5,7}: 5^{-3,7} = \frac{5^{-4,7}\cdot 7^{-4,7}\cdot 7^{5,7}}{5^{-3,7}} = 7\cdot 5^{-1} = \frac{7}{5} = 1,4.$

19. $\left(\sqrt{3\frac{6}{7}-\sqrt{1\frac{5}{7}}}\right):\sqrt{\frac{3}{28}}$

Переведите смешанные числа в неправильные дроби. Посмотрите, что можно вынести из-под корня.

$\left(\sqrt{3\frac{6}{7}}-\sqrt{1\frac{5}{7}}\right):\sqrt{\frac{3}{28}} =$

$= \left(\sqrt{\frac{27}{7}}-\sqrt{\frac{12}{7}}\right):\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right):\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}:\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = 2.$

20. $0,8^{\frac{1}{7}}\cdot 5^{\frac{2}{7}}\cdot 20^{\frac{6}{7}}$

Приведите степени к одному основанию. Число 0,8 лучше записать в виде обыкновенной дроби.

$0,8^{\frac{1}{7}}\cdot 5^{\frac{2}{7}}\cdot 20^{\frac{6}{7}} = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{7}}\cdot 5^{\frac{2}{7}}\cdot(4\cdot 5)^{\frac{6}{7}} = \frac{4^{\frac{1}{7}}\cdot 5^{\frac{2}{7}}\cdot 4^{\frac{6}{7}}\cdot 5^{\frac{6}{7}}}{5^{\frac{1}{7}}} = 4\cdot 5 = 20.$

21. $(4a)^3: a^7\cdot a^4$

$(4a)^3: a^7\cdot a^4 = \frac{4^3\cdot a^3\cdot a^4}{a^7} = 4^3 = 64$

22. Найдите значение выражения $\dfrac{a^{3,33}}{a^{2,11}\cdot a^{2,22}}$ *при* $a=\frac{2}{7}$.

$$\frac{a^{3,33}}{a^{2,11}\cdot a^{2,22}}=\frac{a^{3,33}}{a^{4,33}}=a^{-1}$$

$$\left(\frac{2}{7}\right)^{-1}=\frac{7}{2}=3{,}5$$

23. Найдите значение выражения $\dfrac{6n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{12}}\cdot n^{\frac{1}{4}}}$ *при* $n>0$.

$$\frac{6n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{12}}\cdot n^{\frac{1}{4}}}=6\cdot n^{\frac{1}{3}-\frac{1}{12}-\frac{1}{4}}=6\cdot n^{0}=6$$

24. $\dfrac{\left(\sqrt{13}+\sqrt{7}\right)^{2}}{10+\sqrt{91}}$

Воспользуйтесь формулой квадрата суммы. Найдите способ сократить дробь.

$$\frac{\left(\sqrt{13}+\sqrt{7}\right)^{2}}{10+\sqrt{91}}=\frac{\left(\sqrt{13}\right)^{2}+2\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{7}+\left(\sqrt{7}\right)^{2}}{10+\sqrt{91}}=\frac{13+2\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{7}+7}{10+\sqrt{91}}=$$

$$=\frac{20+2\cdot\sqrt{91}}{10+\sqrt{91}}=\frac{2\cdot\left(10+\sqrt{91}\right)}{10+\sqrt{91}}=2.$$

25. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[9]{\sqrt{m}}}{\sqrt{16\sqrt[9]{m}}}$ *при* $m>0$.

Не пугаемся! Записываем корни в виде степеней, применяем правила действий со степенями. И в следующих двух задачах – тоже.

$$\frac{\sqrt[9]{\sqrt{m}}}{\sqrt{16\sqrt[9]{m}}}=\frac{\left(m^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{9}}}{\left(16\cdot m^{\frac{1}{9}}\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{m^{\frac{1}{18}}}{4\cdot m^{\frac{1}{18}}}=\frac{1}{4}=0{,}25.$$

26. Найдите значение выражения $\dfrac{\left(\sqrt{3}\cdot a\right)^{2}\cdot\sqrt[5]{a^{3}}}{a^{2,6}}$ *при* $a>0$.

$$\frac{\left(\sqrt{3}\cdot a\right)^{2}\cdot\sqrt[5]{a^{3}}}{a^{2,6}}=\frac{3\cdot a^{2}\cdot a^{\frac{3}{5}}}{a^{2,6}}=\frac{3\cdot a^{2,6}}{a^{2,6}}=3.$$

27. Найдите значение выражения $\dfrac{15\cdot\sqrt[5]{\sqrt[28]{a}}-7\cdot\sqrt[7]{\sqrt[20]{a}}}{2\cdot\sqrt[35]{\sqrt[4]{a}}}$ *при* $a>0$.

$$\frac{15\cdot\sqrt[5]{\sqrt[28]{a}}-7\cdot\sqrt[7]{\sqrt[20]{a}}}{2\cdot\sqrt[35]{\sqrt[4]{a}}}=\frac{15\cdot\left(a^{\frac{1}{28}}\right)^{\frac{1}{5}}-7\cdot\left(a^{\frac{1}{20}}\right)^{\frac{1}{7}}}{2\cdot\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{35}}}=\frac{15\cdot a^{\frac{1}{140}}-7\cdot a^{\frac{1}{140}}}{2\cdot a^{\frac{1}{140}}}=$$

$$=\frac{8\cdot a^{\frac{1}{140}}}{2\cdot a^{\frac{1}{140}}}=\frac{8}{2}=4.$$

Решите уравнения:

28. $2^{4-2x}=64$*;*

Представьте правую часть уравнения как степень основанием 2.

Запомним правило: если степени равны, основания одинаковы, то и показатели тоже равны. Мы как будто «отбрасываем» одинаковые основания - и решаем алгебраическое уравнение.

Почему мы так делаем?

Для ответа на этот вопрос надо знать, что такое показательная функция, какие у нее свойства и график. Об этом вы можете прочитать, например, в моей статье «Показательная функция» на образовательном портале.

$2^{4-2x}=2^6;$

$4-2x=6;$

$x=-1.$

29. $\left(\frac{1}{8}\right)^{-3-x}=512$*;*

А здесь обе части уравнения надо привести к одному основанию. Как вы думаете, какое выбрать? Ведь $\frac{1}{8}=2^{-3}$. Представьте число 512 в виде степени с основанием 2.

$(2^{-3})^{-3-x}=2^9;$

$2^{9+3x}=2^9;$

$9+3x=9;$

$x=0.$

30. $\left(\frac{1}{9}\right)^{x-13}=3$*;*

Представьте $\frac{1}{9}$ в виде степени с основанием 3 и воспользуйтесь тем, что $(a^m)^n=a^{mn}$.

$(3^{-2})^{x-13}=3;$

$3^{-2x+26}=3^1;$

$-2x + 26 = 1;$

$x = 12{,}5.$

31. $9^{-5-x} = 729;$

$9^{-5-x} = 9^3;$

$-5 - x = 3;$

$x = -8.$

32. $16^{x-9} = \frac{1}{2};$

$2^{4x-36} = 2^{-1};$

$4x - 36 = -1;$

$x = 8{,}75.$

33. $2^{3+x} = 0{,}4 \cdot 5^{3+x};$

Как же здесь привести обе части к одному основанию? Если не получается – попробуйте другой прием. Воспользуйтесь тем, что показатели степеней одинаковы.

$\frac{2^{3+x}}{5^{3+x}} = 0{,}4;$

$\left(\frac{2}{5}\right)^{3+x} = \frac{2}{5};$

$3 + x = 1;$

$x = -2.$

Глава 8. Логарифмы

Теперь вы знаете, что такое корни и степени. Вам известны правила действий с ними. Я надеюсь, что большинство задач из главы 7 вам удалось решить самостоятельно. Это значит, что и логарифмы вы легко освоите.

Давайте вернемся к уравнению $2^x = 8$.

Мы знаем, как его решать. Представляем обе части в виде степеней с основанием 2. Степени равны, основания равны, значит, равны и показатели:

$2^x = 2^3$;

$x = 3$.

А если вам встретилось уравнение $2^x = 3$? Что делать?

Попробуйте представить число 3 в виде степени числа 2.

Очевидно, что $2^1 = 2$, а $2^2 = 4$. Но в какую же степень надо возвести число 2, чтобы получить 3? Что-то не удается подобрать! Неужели тупик?

Однажды мы уже встретились с подобной ситуацией. Уравнение $x^2 = 4$ решается легко, его корни $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$. А для решения уравнения $x^2 = 3$ нам понадобилось новое понятие – квадратный корень. Корнями уравнения являются числа $\sqrt{3}$ и $-\sqrt{3}$.

Для того чтобы решить уравнение $2^x = 3$, мы тоже введем новое понятие – **логарифм.**

Определение выучите наизусть.

Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить b.

Иными словами, логарифм числа b по основанию a – это такое число c, что $a^c = b$.

$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$

В выражении $\mathbf{log_a b}$ число a называется **основанием** логарифма. Обратите внимание, читается: «Логарифм b по основанию a».

Вернемся к нашему уравнению. Теперь мы можем записать его решение:

$x = \log_2 3$. Это число – иррациональное, то есть бесконечная непериодическая десятичная дробь. Калькулятор дает ответ: 1,58496250072116…

Итак, логарифм – это показатель степени. Например,

$\log_2 16 = 4$, так как $2^4 = 16$;

$\log_5 125 = 3$, так как $5^3 = 125$;

$\log_3 \left(\frac{1}{3}\right) = -1$, так как $3^{-1} = \frac{1}{3}$;

$\log_{81} 9 = \frac{1}{2}$;

$\log_6 \sqrt{6} = \frac{1}{2}$;

$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right) = 2.$

Логарифм с основанием 10 называется **десятичным** и обозначается lg. Например,

$\lg 100 = 2, \lg 10000 = 4, \lg 0{,}001 = -3, \lg\sqrt{10} = \frac{1}{2}.$

А как вы думаете, чему равен $\log_2(-4)$? Существует ли вообще такое число?

Возведем число 2 в натуральную степень – получим целое положительное число. $2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^5 = 32\ldots$ Возведем в нулевую степень – получим 1. В отрицательную – получим дробь, например, $2^{-1} = \frac{1}{2}$, $2^{-3} = \frac{1}{8}$. Дробные степени можно записывать как корни, об этом мы говорили, то есть $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$, $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$. Опять получаются положительные числа! В какую бы степень мы ни возводили положительное число 2 – ответ будет положительный, а $\log_2(-4)$ – не существует.

Запомним, что **логарифмы определены только для положительных чисел.**

Основание логарифма также выбирается положительным и не равным единице. В самом деле, выражение $\log_1 5$ не имеет смысла: в какую бы степень мы ни возвели число 1, мы получим единицу и ничего больше.

Итак, выражение $\mathbf{\log_a b}$ определено при $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Свойства логарифмов:

$a^{\log_a b} = b;$

$\log_a a^c = c.$

Каждая из этих двух формул представляет собой **основное логарифмическое тождество**. Просто оно записано в разной форме. Напомним, что тождество – математическое выражение, верное для всех значений переменных, при которых его левая и правая части определены.

Логарифм произведения равен сумме логарифмов:

$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c.$

Логарифм частного равен разности логарифмов:

$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c.$

Формула для логарифма степени. Обратите внимание – показатель степени «спрыгивает» перед логарифмом:

$\log_a(b)^c = c \cdot \log_a b.$

Формула перехода к другому основанию:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Частный (и очень важный) случай формулы перехода к другому основанию:

$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$

А теперь – практика. В вариантах ЕГЭ вы встретите и задачи на вычисление, и уравнения с логарифмами.

1. $(\log_2 16) \cdot (\log_6 36)$

В какую степень надо возвести 2, чтобы получить 16? Непосредственно вычисляем оба логарифма, результаты перемножаем.

Ответ: 8

2. $\log_4 \log_5 25$

Какой здесь порядок действий? Сначала вычисляем $\log_5 25$. Затем от полученного результата берем логарифм по основанию 4.

$\log_4 \log_5 25 = \log_4 2 = \frac{1}{\log_2 4} = \frac{1}{2}.$

3. $7 \cdot 5^{\log_5 4}$

Основания логарифма и степени одинаковы и равны 5. Применяем основное логарифмическое тождество.

$7 \cdot 5^{\log_5 4} = 7 \cdot 4 = 28.$

4. $\frac{24}{3^{\log_3 2}} = \frac{24}{2} = 12.$

5. $\log_3 8{,}1 + \log_3 10$

Любую формулу можно читать и слева направо, и справа налево. Чему равна сумма логарифмов с одинаковым основанием?

$\log_3 8{,}1 + \log_3 10 = \log_3 81 = 4.$

6. $\log_{0{,}3} 10 - \log_{0{,}3} 3 = \log_{0{,}3} \frac{10}{3} = \log_{\frac{3}{10}} \frac{10}{3} = -1.$

7. Найдите $\log_a \frac{a}{b^3}$, если $\log_a b = 5$

Применяем формулы для логарифма частного и логарифма степени.

$\log_a \frac{a}{b^3} = \log_a a - \log_a(b^3) = 1 - 3 \cdot \log_a b = 1 - 3 \cdot 5 = 1 - 15 = -14.$

8. $\frac{\log_6 \sqrt{13}}{\log_6 13}$

Запишите $\sqrt{13}$ в виде степени и сократите дробь. Еще один способ – применить формулу перехода к другому основанию.

$\frac{\log_6 \sqrt{13}}{\log_6 13} = \frac{\log_6\left(13^{\frac{1}{2}}\right)}{\log_6 13} = \frac{1}{2}.$

9. $\frac{\log_7 13}{\log_{49} 13}$

В какой формуле присутствует частное логарифмов и чему оно равно?

Применим формулу $\frac{\log_c b}{\log_c a} = \log_a b.$

$\frac{\log_7 13}{\log_{49} 13} = \log_{49} 7 = \frac{1}{\log_7 49} = \frac{1}{2}.$

10. $\frac{\log_3 18}{2+\log_3 2}$

Представьте число 2 в знаменателе в виде логарифма. Примените формулу суммы логарифмов.

$\frac{\log_3 18}{2+\log_3 2} = \frac{\log_3 18}{\log_3 9+\log_3 2} = \frac{\log_3 18}{\log_3 18} = 1.$

11. $64^{\log_8 \sqrt{3}}$

$64 = 8^2$. Вспомним одно из свойств степеней: $a^{\text{mn}} = a^{\text{nm}}$.

$64^{\log_8 \sqrt{3}} = (8^2)^{\log_8 \sqrt{3}} = \left(8^{\log_8 \sqrt{3}}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3.$

12. $\left(3^{\log_2 3}\right)^{\log_3 2}$

И здесь тот же прием, что и в предыдущей задаче.

$\left(3^{\log_2 3}\right)^{\log_3 2} = \left(3^{\log_3 2}\right)^{\log_2 3} = 2^{\log_2 3} = 3.$

13. $6 \cdot \log_7 \sqrt[3]{7}$

Используйте формулу логарифма степени.

$6 \cdot \log_7 \sqrt[3]{7} = 6 \cdot \log_7 \left(7^{\frac{1}{3}}\right) = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \log_7 7 = \frac{6}{3} = 2.$

14. $\log_{0,8} 3 \cdot \log_3 1,25$

Переведите числа 0,8 и 1,25 в обыкновенные дроби – и станет ясно, как действовать дальше.

$\log_{0,8} 3 \cdot \log_3 1,25 = \log_{\frac{4}{5}} 3 \cdot \log_3 \frac{5}{4} = \frac{1}{\log_3 \frac{4}{5}} \cdot \log_3 \frac{5}{4} = \frac{\log_3 \frac{5}{4}}{\log_3 \frac{4}{5}} = \log_{\frac{4}{5}} \frac{5}{4} = -1.$

15. $\log_{\sqrt{7}}^2 49$

В этой задаче важен порядок действий. Сначала взяли $\log_{\sqrt{7}} 49$, затем результат возвели в квадрат. Поэтому и решать лучше по действиям. $\log_{\sqrt{7}} 49 = \log_{\sqrt{7}} 7^2 = \cdots$

$\log_{\sqrt{7}}^2 49 = \left(\log_{\sqrt{7}} 49\right)^2 = \left(\frac{\log_7 49}{\log_7 \sqrt{7}}\right)^2 = (2 \cdot 2)^2 = 4^2 = 16.$

16. $\log_5 9 \cdot \log_3 25$

Пользуйтесь формулой перехода к другому основанию!

$\log_5 9 \cdot \log_3 2\,5 = \log_5(3^2) \cdot \log_3(5^2) = 2 \cdot \log_5 3 \cdot 2 \cdot \log_3 5 = 4 \cdot \log_5 3 \cdot \log_3 5 =$

$= 4 \cdot \frac{\log_5 3}{\log_5 3} = 4.$

17. $5^{3+\log_5 2}$

Логарифмы и степени – взаимосвязанные темы. Вспомните, чему равно a^{b+c}

$5^{3+\log_5 2} = 5^3 \cdot 5^{\log_5 2} = 125 \cdot 2 = 250.$

18. $\frac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}}$

В этой задаче вам тоже помогут свойства степеней.

$\frac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}} = 9^{\log_5 50 - \log_5 2} = 9^{\log_5 25} = 9^2 = 81.$

19. $\log_{0,25} 2$

Представьте 0,25 в виде обыкновенной дроби. Перейдите к другому основанию логарифма.

$$\log_{0,25} 2 = \log_{\frac{1}{4}} 2 = \frac{1}{\log_2 \frac{1}{4}} = 1 : (-2) = -0{,}5.$$

20. $(1 - \log_2 12) \cdot (1 - \log_6 12)$

Обратите внимание, что $12 = 6 \cdot 2$. Представьте $\log_2 12$ в виде суммы логарифмов и упростите выражение.

$$(1 - \log_2 1\,2) \cdot (1 - \log_6 1\,2) = (1 - \log_2 (6 \cdot 2)) \cdot (1 - \log_6 (6 \cdot 2)) =$$

$$= (1 - \log_2 6 - \log_2 2) \cdot (1 - \log_6 6 - \log_6 2) = -\log_2 6 \cdot (-\log_6 2) =$$

$$= \log_2 6 \cdot \log_6 2 = \frac{\log_2 6}{\log_2 6} = 1.$$

Как решать логарифмические уравнения?

Разберем простую задачу из варианта ЕГЭ.

24. $\log_2(15+x) = \log_2 3$

Основания логарифмов равны, сами логарифмы тоже равны – значит, равны и числа, от которых они берутся.

Обычно ученики запоминают это правило в краткой жаргонной формулировке: «Отбросим логарифмы!»

Логарифмы, конечно, не коньки, чтобы их отбрасывать, но суть действия отражена верно :-)

Получаем:

$15 + x = 3;$

$x = -12.$

Почему мы «отбрасываем логарифмы»? Связано это со свойством логарифмической функции: каждое свое значение она принимает только один раз. Это значит, что если логарифмы двух чисел по какому-либо основанию равны, значит, равны и сами числа. Подробно – на сайте в моей статье «Логарифмическая функция».

Решая логарифмические уравнения, не забывайте про **область допустимых значений** логарифма. Помните, что выражение $\log_a b$ определено при $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$. Найдя неизвестную величину, подставьте ее в уравнение. Если его левая или правая часть не имеют смысла – значит, найденное число не является решением уравнения и не может быть ответом задачи. Это хороший способ проверки на ЕГЭ.

25. $log_2(4 - x) = 7$

В левой части уравнения – логарифм, в правой – число 7. Примените основное логарифмическое тождество:

$7 = \log_2 2^7$.

Ответ: -124.

26. $\log_{\frac{1}{7}}(7 - x) = -2$

$\log_{\frac{1}{7}}(7-\mathrm{x}) = \log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$;

$7 - x = \left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$;

$7 - x = 49$;

$x = -42$.

27. $\log_5(5-\mathrm{x}) = 2 \cdot \log_5 3$

Видите число 2 перед логарифмом в правой части уравнения? Сейчас оно мешает вам «отбросить логарифмы». Что с ним сделать, чтобы в левой и правой частях были просто логарифмы по основанию 5?

$\log_5(5-x) = \log_5(3^2)$;

$\log_5(5-x) = \log_5 9$;

$5 - x = 9$;

$x = -4$.

28. $\log_5(7-\mathrm{x}) = \log_5(3-\mathrm{x}) + 1$

Представьте число 1 в виде логарифма по основанию 5.

$\log_5(7-x) = \log_5(3-x) + \log_5 5$;

$\log_5(7-x) = \log_5(15-5x)$;

$7 - x = 15 - 5x$;

$4x = 8$;

$x = 2$.

29. $\log_{\mathrm{x}-5} 49 = 2$

Мы видим, что переменная x находится в основании логарифма. Это неудобно. Даже в сложных уравнениях лучше работать с логарифмами по постоянному основанию. Значит, пользуемся формулой перехода к другому основанию: $\log_{\mathrm{a}} \mathrm{b} = \frac{1}{\log_{\mathrm{b}} \mathrm{a}}$.

$\frac{1}{\log_{49}(\mathrm{x}-5)} = 2$;

$\log_{49}(x-5) = \frac{1}{2}$;

$\log_{49}(x-5) = \log_{49}\left(49^{\frac{1}{2}}\right)$;

$\log_{49}(x-5) = \log_{49} 7$;

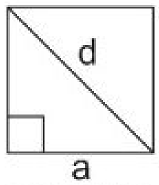
$x - 5 = 7$;

$x = 12.$

Глава 9. Площади фигур, основы тригонометрии

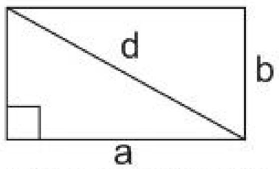
Сейчас мы займемся геометрией и стереометрией. Ничего сложного – только определения синуса, косинуса и тангенса, формулы площадей и объемов, а также простые приемы, о которых мы расскажем.

Начнем с вычисления площадей. Прежде всего, учим формулы, без них никуда. Учите и применяйте! Все необходимые формулы - в моем Справочнике для подготовки к ЕГЭ по математике!



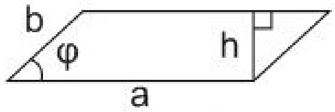
квадрат

Площадь: $S = a^2$
Пример: $P = 4a$ (Периметр - это сумма всех сторон фигуры)
Длина диагонали: $d = a \cdot \sqrt{2}$



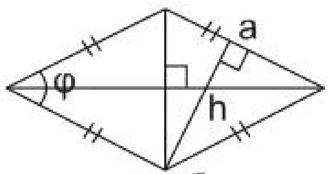
прямоугольник

$S = a \cdot b$
$d = \sqrt{a^2 + b^2}$



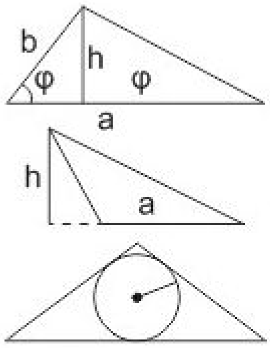
параллелограмм

$S = a \cdot h = a \cdot b \cdot \sin \varphi$



ромб

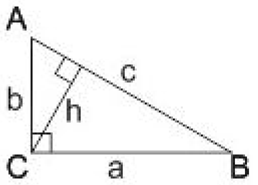
$S = a \cdot h = a^2 \cdot \sin \varphi = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$
(d_1 и d_2 - диагонали ромба)



треугольник

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\varphi = p \cdot r =$$
$$= \sqrt{p(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} = \frac{abc}{4R}$$

(p - полупериметр, r - радиус вписанной окружности, R - радиус описанной окружности)



прямоугольный треугольник

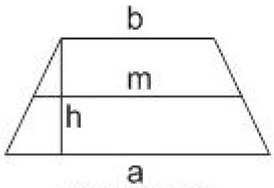
$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ (Теорема Пифагора)

$$\sin A = \frac{a}{c}$$

$$\cos A = \frac{b}{c}$$

$$\mathrm{tg}\, A = \frac{a}{b}$$

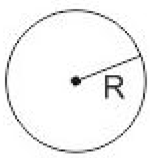


трапеция

$$S = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h$$

$$m = \frac{1}{2}(a+b)$$

(m - средняя линия, отрезок, соединяющий середины боковых сторон)

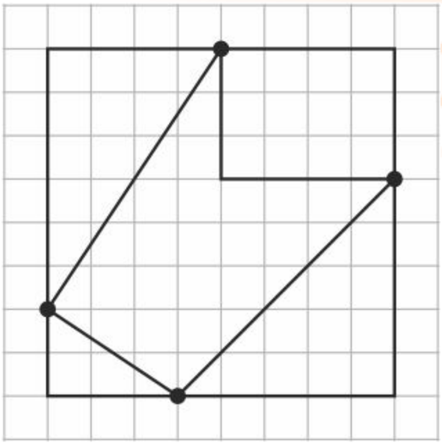


круг

$S = \pi R^2$

$L = 2\pi R = \pi D$ (D - диаметр)

1. Найдите площадь фигуры, изображенной на клетчатой бумаги с размером клетки 1×1 *см. Ответ выразите в см²*.



Решение:

Площадь фигуры получится, если из площади большого квадрата (со стороной 8) вычесть площади четырех фигур:

Прямоугольника размерами 3 х 4 в правом верхнем углу,

Прямоугольного треугольника с катетами 5 и 5, правый нижний угол,

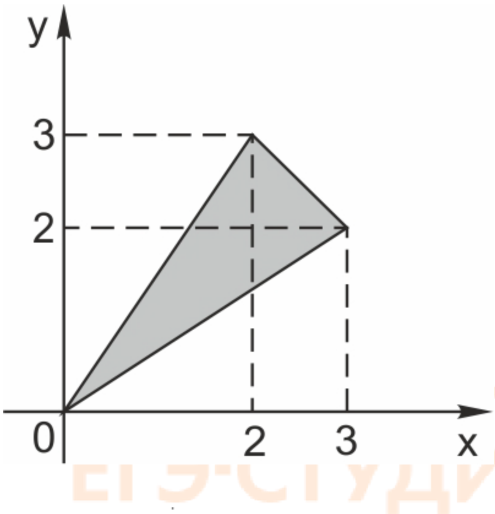
Прямоугольного треугольника с катетами 4 и 6, левый верхний угол,

Прямоугольного треугольника с катетами 2 и 3, левый нижний угол

Получим: $S = 64 - 12 - \frac{25}{2} - 12 - 3 = 24{,}5$

Ответ: 24,5

2. Найдите площадь треугольника, изображенного на рисунке.



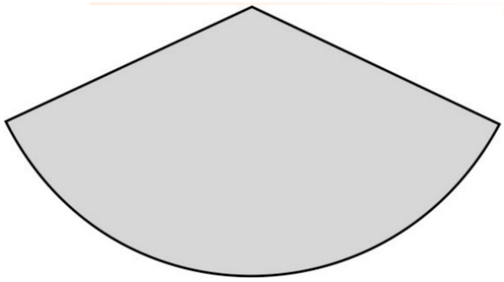
Решение:

Площадь треугольника равна разности площади квадрата со стороной 3 и площадей трех прямоугольных треугольников: $S = S_{\text{квадр}} - (S_1 + S_2 + S_3)$

$S = 3 \cdot 3 - \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1\right) = 9 - 6{,}5 = 2{,}5$

Ответ: 2,5

3. Найдите площадь сектора круга радиуса 1, длина дуги которого равна 2.



На этом рисунке мы видим сектор, то есть часть круга. Очевидно, что:

Длина дуги во столько раз меньше длины окружности, во сколько раз ее градусная мера меньше, чем полный круг, то есть 360 градусов.

Площадь сектора во столько раз меньше площади всего круга, во сколько раз его градусная мера меньше, чем полный круг, то есть 360 градусов.

Площадь всего круга равна $\pi R^2 = \pi$, так как $R = 1$. Остается узнать, какая часть круга изображена. Поскольку длина всей окружности равна $2\pi R = 2\pi$ (так как $R = 1$), а длина дуги данного сектора равна 2, следовательно, длина дуги в π раз меньше, чем длина всей окружности. Угол, на который опирается эта дуга, также в π раз меньше, чем полный круг (то есть 360 градусов). Значит, и площадь сектора будет в π раз меньше, чем площадь всего круга.

Ответ: 1.

Следующая наша тема - основы тригонометрии.

Напомним, что **прямым** называется угол, равный 90°, **острым** – угол меньший 90°, **тупым** – угол больший 90° и меньший 180°. Применительно к такому углу «тупой» - не оскорбление, а математический термин :-)

Нарисуем прямоугольный треугольник. Прямой угол обычно обозначается С. Обратите внимание, что сторона, лежащая напротив угла, обозначается той же буквой, только маленькой. Так, сторона, лежащая напротив угла А, обозначается a.

В прямоугольном треугольнике сторона, лежащая напротив прямого угла, называется **гипотенузой**.

Стороны, лежащие напротив острых углов, называются **катеты**.

Катет, лежащий напротив угла А, называется **противолежащим.** Другой катет, который лежит на одной из сторон угла А – **прилежащим**.

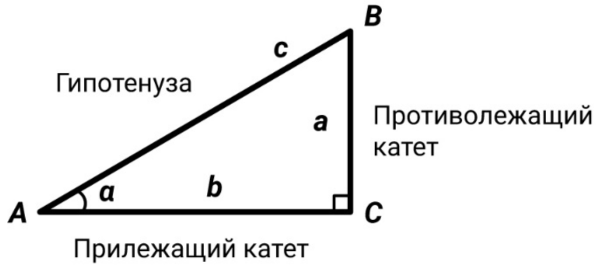
Прямоугольный треугольник

Теорема Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$

a и b – катеты, c – гипотенуза.

Синус острого угла в прямоугольном треугольнике - это отношение противолежащего катета к гипотенузе,

$\sin\angle A = \frac{a}{c}$.



Косинус острого угла в прямоугольном треугольнике - это отношение прилежащего катета к гипотенузе,

$\cos\angle A = \frac{b}{c}$.

Тангенс острого угла в прямоугольном треугольнике - это отношение противолежащего катета к прилежащему,

$\mathrm{tg}\angle A = \frac{a}{b}$.

Котангенс острого угла в прямоугольном треугольнике - это отношение прилежащего катета к противолежащему,

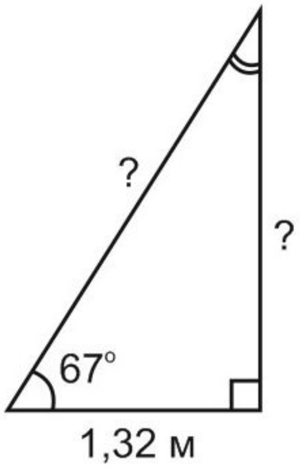
$\mathrm{ctg}\,\angle A = \frac{b}{a}$.

Это определения. А для чего все-таки нужен синус, косинус, тангенс и котангенс?

Мы знаем, что **сумма углов любого треугольника равна $180°$.**

Знаем соотношение между **сторонами** прямоугольного треугольника. Это теорема Пифагора: $\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$

То есть, зная два угла в треугольнике, можно найти третий. Зная две стороны в прямоугольном треугольнике, можно найти третью. Углы – отдельно, стороны – отдельно. А что делать, если в прямоугольном треугольнике известен один угол (кроме прямого) и одна сторона?



Вот с этим и столкнулись люди в прошлом, составляя карты местности и звездного неба. Ведь не всегда можно непосредственно измерить все стороны треугольника.

Синус, косинус и тангенс – их еще называют **тригонометрическими функциями угла** – дают соотношения между **сторонами** и **углами** треугольника. Зная угол, можно найти все его тригонометрические функции по специальным таблицам. А зная синусы, косинусы и тангенсы углов треугольника и одну из его сторон, можно найти остальные.

Мы тоже нарисуем такую таблицу для углов от 0 до 90°.

φ	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\varphi$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-
$\operatorname{ctg}\varphi$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

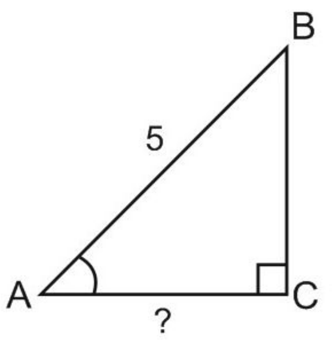
Разберем несколько задач по тригонометрии из Банка заданий ФИПИ:

9. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\sin\angle A = 0{,}1$. *Найдите cos ∠B.*

Задача решается за четыре секунды.

Поскольку $\angle A + \angle B = 90°$, $\sin\angle A = \cos\angle B = 0{,}1$.

10. В треугольнике ABC угол C равен $90°$*, AB = 5,* $sin\angle A = \frac{7}{25}$*. Найдите AC.*



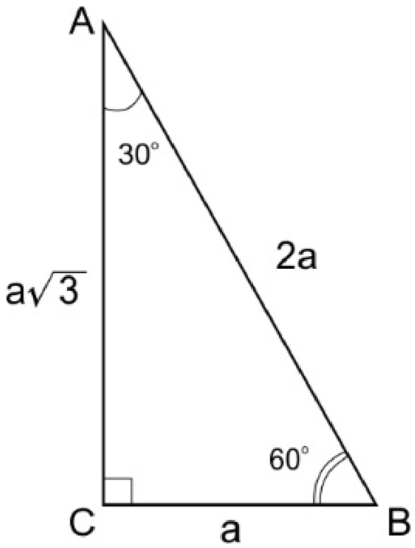
$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{BC}{AB} = \frac{7}{25}$. Отсюда BC = $\frac{7}{25} \cdot$ AB = $\frac{7}{5}$.

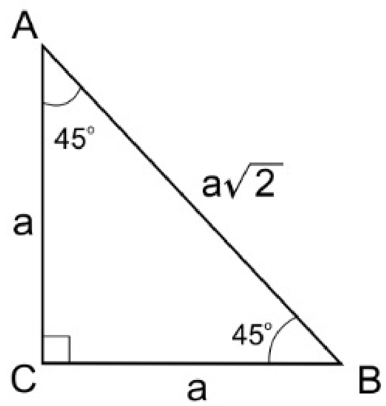
Найдем AC по теореме Пифагора.

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \frac{24}{25} = 0{,}96$$

11. В треугольнике ABC угол C равен $90°$*, угол A равен* $60°$*, BC=2. Найдите AB.*

Часто в задачах встречаются треугольники с углами 90°, 30° и 60° или с углами 90°, 45° и 45°. Основные соотношения для них лучше запомнить наизусть.



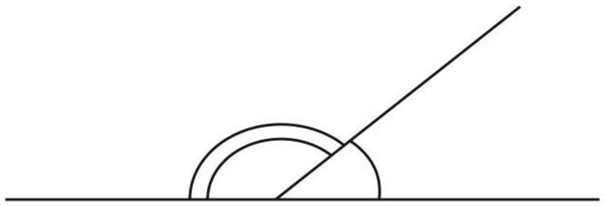


По условию, AB – гипотенуза, BC – катет, противолежащий углу A.

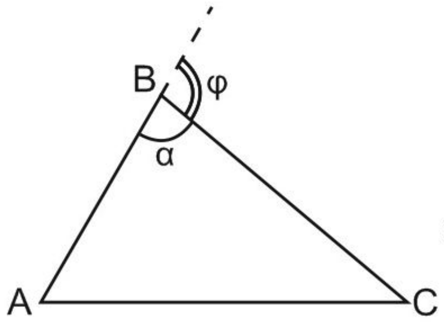
sin A= $\frac{a}{c} = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, так как угол A равен 60°. Отсюда AB = $\frac{BC}{sin\,A}$= 4.

В некоторых задачах требуется найти синус, косинус или тангенс внешнего угла треугольника. А что такое внешний угол треугольника?

На этом рисунке изображены смежные углы. Так называются углы, имеющие общую вершину и общую сторону и образующие в сумме развернутый угол, то есть 180°.



Продолжили одну из сторон треугольника. Внешний угол при вершине B – это угол, смежный с углом B. Если угол B острый, то смежный с ним угол – тупой, и наоборот.



$$\varphi = 180^\circ - \alpha$$
$$\varphi = \angle A + \angle C$$
$$\sin\varphi = \sin\alpha$$
$$\cos\varphi = -\cos\alpha$$

Обратите внимание, что

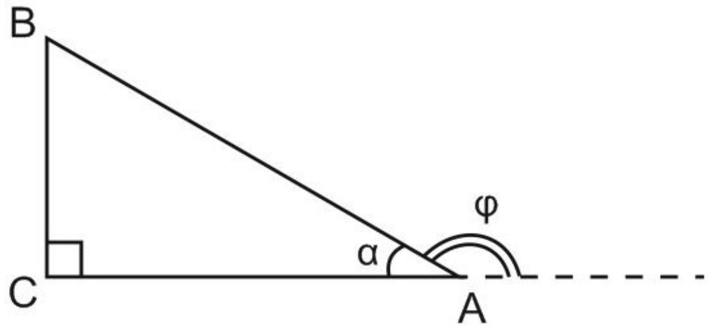
$\sin\,(180° - \alpha) = \sin\alpha$

$\cos\,(180° - \alpha) = -\cos\alpha$

$\mathrm{tg}(180° - \alpha) = -\,\mathrm{tg}\,\alpha$

Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

12. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\cos\angle A = \frac{4}{\sqrt{17}}$*. Найдите тангенс внешнего угла при вершине A.*



Пусть φ – внешний угол при вершине A.

$\cos\varphi = -\cos A = -\frac{4}{\sqrt{17}}$. Зная $\cos\varphi$, найдем $\mathrm{tg}\,\varphi$ по формуле

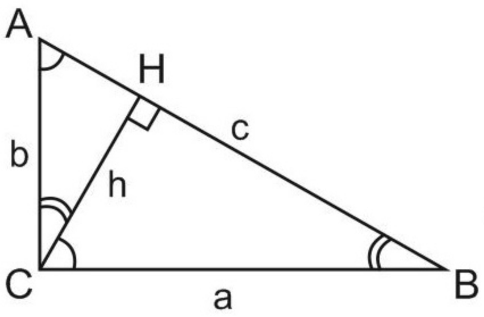
$$\frac{1}{\cos^2\varphi} = 1 + \mathrm{tg}^2\varphi$$

Получим: $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{4}} = 0{,}25$.

Часто для обозначения углов пользуются греческими буквами: α, β, φ и другими. Будет замечательно, если вы выучите их написание и название. Не называть же их всякий раз «эта штучка»! :-)

Специально для этого в конце книги приведен греческий алфавит.

Во многих задачах по геометрии рассматривается прямоугольный треугольник, в котором высота проведена из вершины прямого угла. Посмотрим, что при этом получается:



$\angle BAC = \angle BCH$

$\angle ABC = \angle ACH$

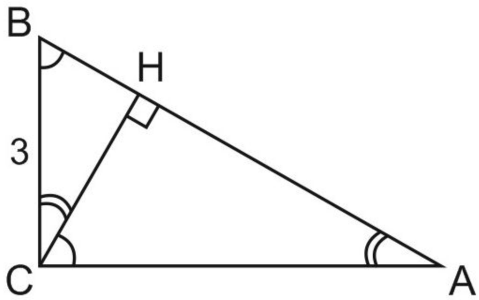
$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{h}{b} = \frac{BH}{a}$

$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{h}{a} = \frac{AH}{b}$

$S_{ABC} = \frac{ab}{2} = \frac{ch}{2}$

Обратите внимание на треугольники ABC, BCH и ACH. Мы видим, что угол CAB равен углу HCB, а угол ABC равен углу ACH. Иными словами, каждый из трех углов треугольника ABC равен одному из углов треугольника ACH (и треугольника BCH). Треугольники ABC, ACH и BCH называются **подобными.**

13. В треугольнике ABC угол C равен 90°, *CH – высота, BC=3,* $\cos \angle A = \frac{\sqrt{35}}{6}$. *Найдите AH.*



Рассмотрим треугольник ABC. В нем известны косинус угла A и противолежащий катет BC. Зная синус угла A, мы могли бы найти гипотенузу AB. Так давайте найдем sinA:

$\sin^2\angle A + \cos^2 \angle A = 1$

$\sin^2 \angle A + \frac{35}{36} = 1$

$\sin^2 \angle A = \frac{1}{36}$

$\sin \angle A = \frac{1}{6}$.

Тогда $AB = BC : \sin \angle A = 3 : \frac{1}{6} = 3 \cdot 6 = 18$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник BCH, ∠H = 90°. Поскольку ∠HCB = ∠A,

$\sin \angle HCB = HB : BC$.

Отсюда $HB = BC \cdot \sin \angle HCB = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

$AH = AB - HB = 18 - 0{,}5 = 17{,}5.$

Ответ: $17{,}5.$

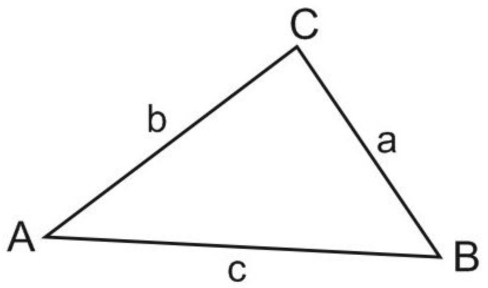
Глава 10. Планиметрия. Задания Части 1 ЕГЭ

Даже в вариантах ЕГЭ базового уровня есть задачи по геометрии. При этом, у выпускника школы знания по геометрии часто близки к нулю. Геометрии в школе нет.

Да, в школьном расписании есть такой предмет, но экзамен по нему не обязателен, поэтому уроки геометрии заменяются подготовкой к ОГЭ по алгебре, мытьем окон, классным часом, и в результате абитуриент не знает, как вычислить площадь квадрата [5].

Для решения планиметрических задач части 1 нужно совсем немного. Все основные формулы, факты, теоремы - в нашем Справочнике для подготовки к ЕГЭ по математике.

Начнем с треугольников и основных фактов, с ними связанных.

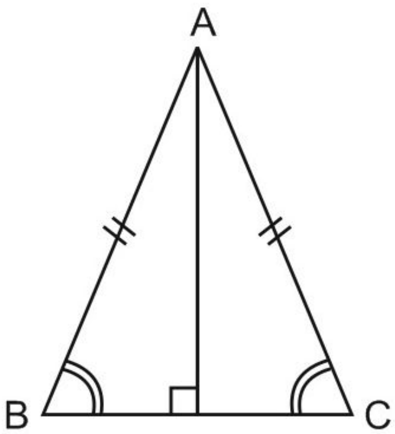


Сумма углов любого треугольника равна 180°.

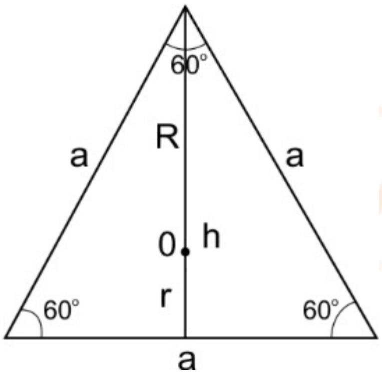
В треугольнике напротив большей стороны лежит больший угол. Напротив меньшей стороны – меньший угол.

Сумма двух сторон треугольника всегда больше третьей стороны:

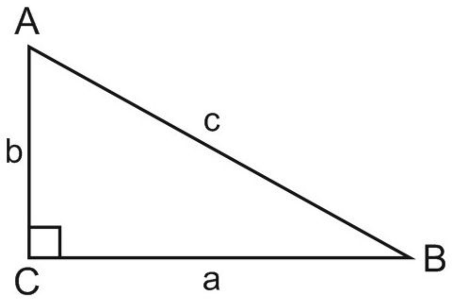
$a + c > b$ (неравенство треугольника)



Треугольник, у которого две стороны равны, называется равнобедренным. Эти стороны называют боковыми. Напротив равных сторон лежат равные углы. Высота, проведенная к третьей стороне (основанию) равнобедренного треугольника, является также медианой и биссектрисой.

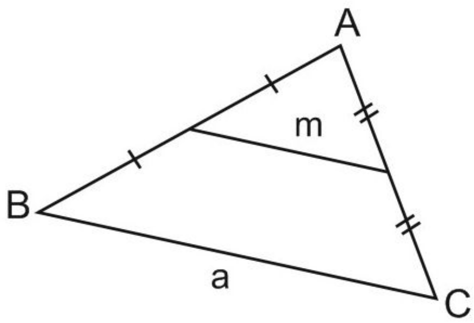


Равносторонним (или правильным) называется треугольник, у которого все стороны равны. Все его углы равны 60°.



В прямоугольном треугольнике больший угол равен 90°. Сторона, лежащая напротив него, называется гипотенуза, две другие – катеты. Теорема Пифагора:

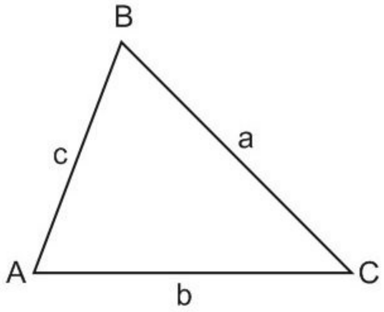
$$c^2 = a^2 + b^2$$



Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон. Средняя линия параллельна третьей стороне треугольника и равна ее половине:

$m = \frac{a}{2}$.

Для любого треугольника выполняются теорема синусов и теорема косинусов.



Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C} = 2R$$

R - радиус описанной окружности

Теорема косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos C$

Все формулы площади треугольника:

$S = \frac{1}{2} a \cdot h = \frac{1}{2}\ a \cdot b \cdot \sin C = p \cdot r = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$

(h – высота, R – радиус описанной окружности, r – радиус вписанной окружности, p – полупериметр.)

1. Один из внешних углов треугольника равен $85°$. *Углы, не смежные с данным внешним углом, относятся как 2:3. Найдите наибольший из них. Ответ дайте в градусах.*

Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним. Следовательно, сумма двух других углов треугольника равна $85°$, а их отношение равно 2:3. Пусть эти углы равны $2x$ и $3x$. Получим уравнение

$2x + 3x = 85$ и найдем $x = 17$.

Тогда $3x = 51$.

Ответ: 51.

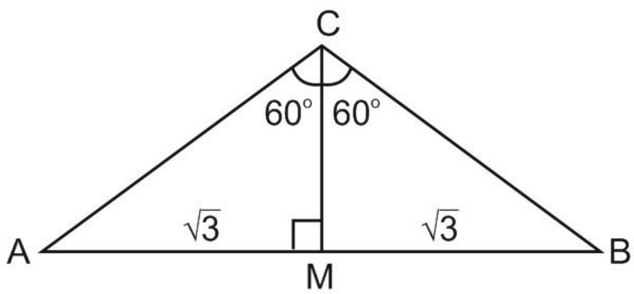
2. Один из углов равнобедренного треугольника равен $98°$. *Найдите один из других его углов. Ответ дайте в градусах.*

Как вы думаете, может ли равнобедренный треугольник иметь два угла по $98°$?

Нет, конечно! Ведь сумма углов треугольника равна $180°$. Значит, один из углов треугольника равен $98°$, а два других равны $\frac{180-98}{2} = 41°$.

Ответ: 41.

3. В треугольнике ABC AC = BC, угол C равен $120°$, $AB = 2\sqrt{3}$. *Найдите* AC.



На рисунке уже дана подсказка. Высота CM делит равнобедренный треугольник ABC на два прямоугольных. Одновременно CM является медианой и биссектрисой треугольника ABC.

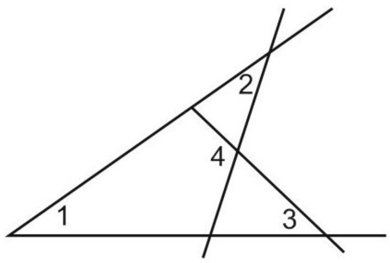
Рассмотрим треугольник ACM.

Угол AMC прямой, $AM = \frac{1}{2}AB = \sqrt{3}$, $\angle ACM = 60°$.

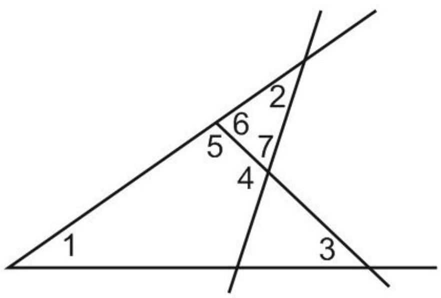
Из треугольника AMC найдем $AC = AM : \sin 60° = \sqrt{3} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\cdot 2}{\sqrt{3}} = 2$.

Ответ: 2.

4. На рисунке угол 1 равен $46°$*, угол 2 равен* $30°$*, угол 3 равен* $44°$*. Найдите угол 4. Ответ дайте в градусах.*



Давайте отметим на чертеже еще несколько углов. Они нам понадобятся.



Сначала найдем угол 5.

Он равен $180° - \angle 1 - \angle 3 = 90°$

Тогда $\angle 6 = 90°$

$\angle 7 = 180° - \angle 2 - \angle 6 = 60°$,

Угол 4, смежный с углом 7, равен $120°$.

Ответ: 120.

Заметим, что такой способ решения – не единственный. Просто находите и отмечайте на чертеже все углы, которые можно найти, - и, в конце концов, получите ответ.

5. Углы треугольника относятся как 2:3:4. Найдите меньший из них. Ответ дайте в градусах.

Пусть углы треугольника равны $2x$, $3x$ и $4x$. Тогда

$2x + 3x + 4x = 180°$

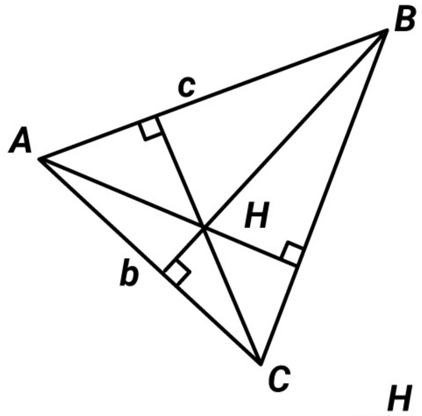
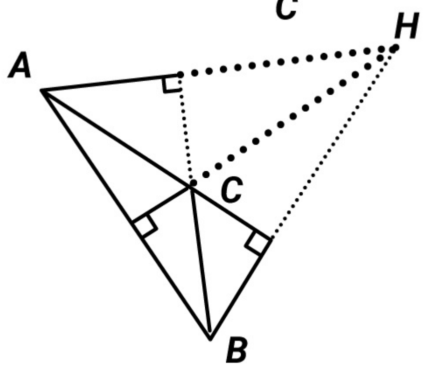
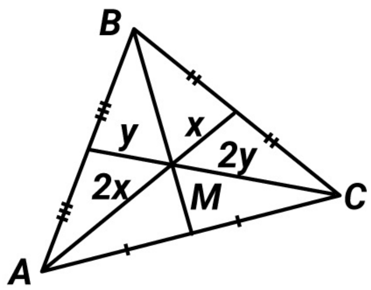
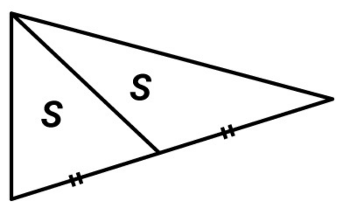
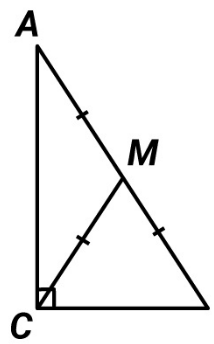
$9x = 180°$

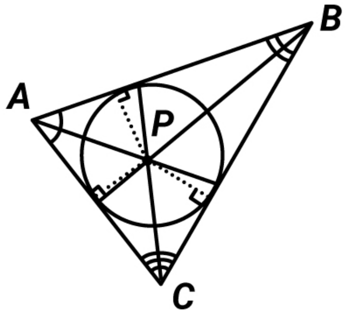
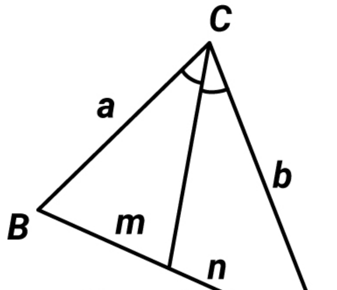
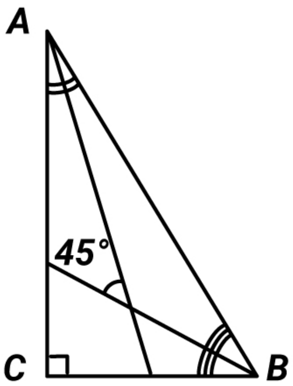
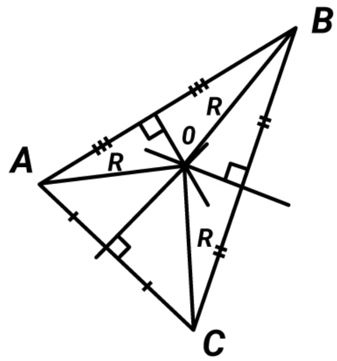
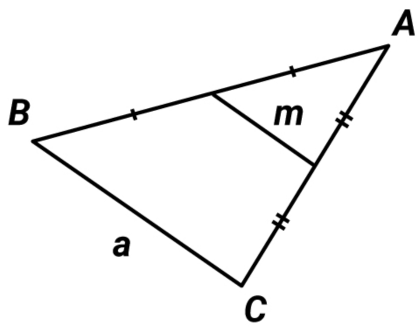
$x = 20°$

Тогда $2x = 40°$.

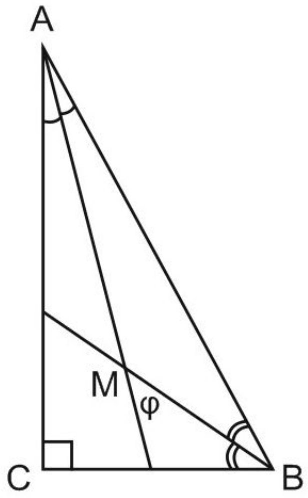
Ответ: 40.

Высоты, медианы и биссектрисы треугольника.

Элементы треугольника		
Высота треугольника – перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на противоположную сторону.	 	Три высоты треугольника пересекаются в одной точке. В случае тупоугольного треугольника пересекаются продолжения высот. Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту $S_{\triangle}=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{b\cdot h_b}{2}=\frac{c\cdot h_c}{2}$
Медиана треугольника – отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.	   ***CM = AM = BM = R***	Три медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении ***2:1***, считая от вершины. Медиана треугольника делит его на два равных по площади треугольника. Три медианы треугольника делят его на ***6*** равных по площади треугольников. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы.

Биссектриса треугольника делит угол треугольника пополам.	  $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$ 	Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка равноудалена от сторон треугольника и является центром окружности, вписанной в треугольник. Биссектриса треугольника делит противоположную сторону в отношении длин прилежащих сторон. Острый угол между биссектрисами острых углов прямоугольного треугольника равен ***45°***.
Серединный перпендикуляр к стороне треугольника – это множество точек, одинаково удаленных от ее концов.		Три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка равноудалена от вершин треугольника и является центром окружности, описанной вокруг треугольника.
	***Средняя линия треугольника*** – отрезок, соединяющий середины его сторон. Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны. $m = \frac{a}{2}; m \parallel a$	

6. Найдите острый угол между биссектрисами острых углов прямоугольного треугольника. Ответ дайте в градусах.



Пусть биссектрисы треугольника ABC (в котором угол C равен 90°) пересекаются в точке M.

Рассмотрим треугольник ABM.

$\angle MAB = \frac{1}{2}\angle BAC$,

$\angle ABM = \frac{1}{2}\angle ABC$, тогда $\angle AMB = 180° - \angle MAB - \angle ABM = 180° - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BAC)$.

Острый угол между биссектрисами на рисунке обозначен φ.

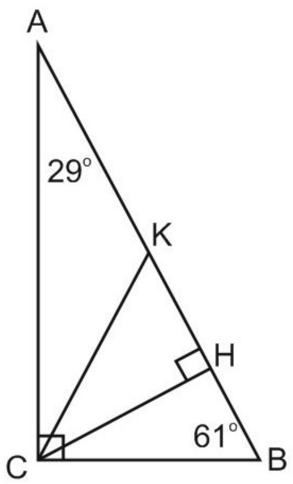
Угол φ смежный с углом AMB, следовательно, $\varphi = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BAC)$.

Поскольку треугольник ABC – прямоугольный, то $\angle ABC + \angle BAC = 90°$.

Тогда $\varphi = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BAC) = 90° : 2 = 45°$.

Ответ: 45.

7. Острые углы прямоугольного треугольника равны 29° *и* 61°. *Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.*



Пусть CH – высота, проведенная из вершины прямого угла C, CK – биссектриса угла C.

Тогда $\angle ACH = \angle ABC = 61°$,

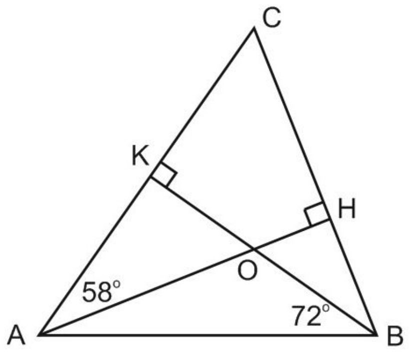
$\angle ACK = 90° : 2 = 45°$.

Угол между высотой и биссектрисой – это угол KCH.

$\angle KCH = \angle ACH - \angle ACK = 61° - 45° = 16°$

Ответ: 16.

8. Два угла треугольника равны $58°$ и $72°$. Найдите тупой угол, который образуют высоты треугольника, выходящие из вершин этих углов. Ответ дайте в градусах.



Из треугольника ABH (угол H – прямой) найдем угол BAH. Он равен 18°.

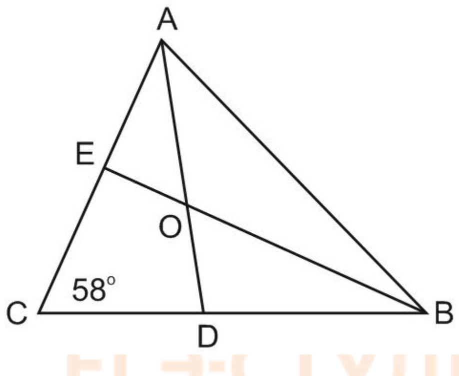
Из треугольника ABK (угол K – прямой) найдем угол ABK. Он равен 32°.

В треугольнике AOB известны два угла. Найдем третий, то есть угол AOB, который и является тупым углом между высотами треугольника ABC:

$\angle = 180° - 18° - 32° = 130°$.

Ответ: 130.

9. В треугольнике ABC угол C равен $58°$, AD и BE – биссектрисы, пересекающиеся в точке O. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.



Пусть в треугольнике ABC угол BAC равен A, угол ABC равен B.

Рассмотрим треугольник AOB.

$\angle OAB = \dfrac{1}{2}\angle A$

$\angle ABO = \frac{1}{2}\angle B,$

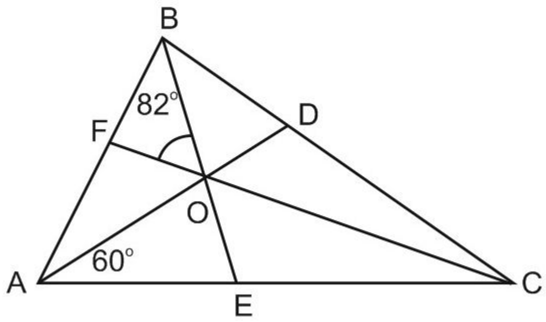
тогда $\angle AOB = 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$.

Из треугольника ABC получим, что $\angle A + \angle B = 180° - 58° = 122°$.

Тогда $\angle AOB = 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 180° - 61° = 119°$.

Ответ: 119.

10. В треугольнике ABC угол A равен 60°, угол B равен 82°. AD, BE и CF – биссектрисы, пересекающиеся в точке O. Найдите угол AOF. Ответ дайте в градусах.



Найдем угол ACB. Он равен 38°.

Тогда $\angle ACF = \frac{1}{2}\angle ACB = 19°$.

Из треугольника ACF найдем угол AFC. Он равен 101°.

Рассмотрим треугольник AOF.

$\angle AFO = 101°$, $\angle FAO = \frac{1}{2}\angle BAC = 30°$. Значит, $\angle AOF = 49°$.

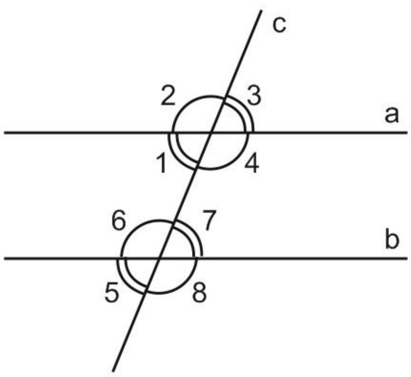
Ответ: 49.

Четырехугольники

Следующая тема – четырехугольники. Прежде чем к ней перейти, дадим несколько важных определений.

Пусть прямые *a* и *b* параллельны, прямая *c* пересекает их и называется секущей.

При этом образуется 8 углов. Они показаны на рисунке.



Углы 1 и 3 (а также 2 и 4, 5 и 7, 6 и 8) называются **вертикальными**.

Вертикальные углы равны, то есть

$\angle 1 = \angle 3,$

$\angle 2 = \angle 4.$

Углы 2 и 3 – смежные. Их сумма равна 180°.

Углы 2 и 6 (а также 3 и 7, 1 и 5, 4 и 8) называются **соответственными**.

Соответственные углы равны, то есть

$\angle 2 = \angle 6,$

$\angle 3 = \angle 7.$

Углы 3 и 5 (а также 2 и 8, 1 и 7, 4 и 6) называют **накрест лежащими**.

Накрест лежащие углы равны, то есть

$\angle 3 = \angle 5,$

$\angle 1 = \angle 7,$

$\angle 2 = \angle 8,$

$\angle 4 = \angle 6.$

Наконец, углы 1 и 6 (а также 4 и 7) называют **односторонними**. Можно сказать, что односторонние углы лежат «по одну сторону от всей конструкции».

Сумма односторонних углов равна 180°, то есть

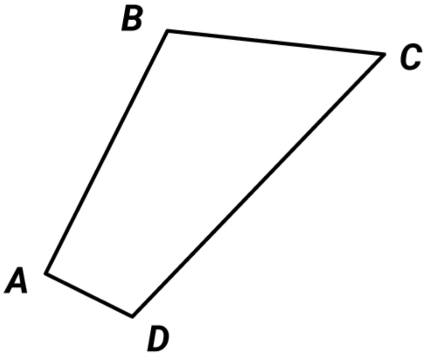
$\angle 1 + \angle 6 = 180°,$

$\angle 4 + \angle 7 = 180°.$

Эти факты пригодятся нам, когда мы займемся задачами о четырехугольниках. Конечно, там их еще надо разглядеть. Зато, увидев на чертеже односторонние или накрест лежащие углы, вы сделаете один из шагов, из которых и состоит решение.

Четырехугольники

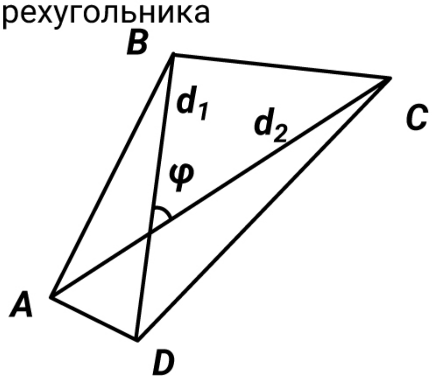
<table>
<tr><th>Выпуклый</th><th>Невыпуклый</th></tr>
<tr><td>



Сумма углов выпуклого четырехугольника равна ***360°***

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

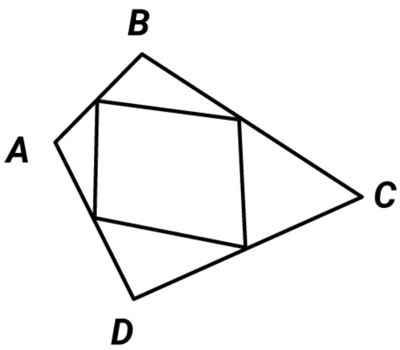
Площадь выпуклого четырехугольника



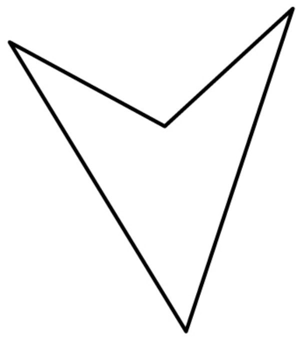
$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \cdot \sin\varphi.$

d_1 ***и*** d_2 – диагонали.

Середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма



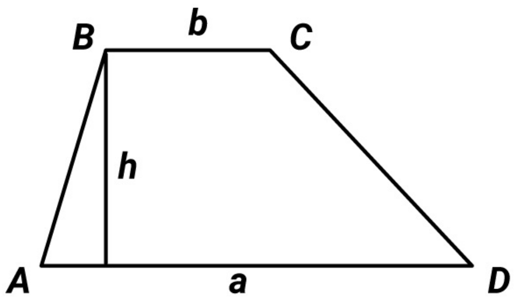
</td><td>



На практике: представляем как комбинацию треугольников и выпуклых четырехугольников.

</td></tr>
</table>

Трапеция – четырехугольник, имеющий ровно одну пару параллельных сторон.

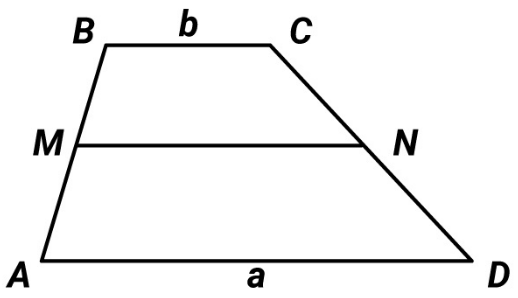
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>

$BC \parallel AD$;

BC и AD – основания, AB и CD– боковые стороны.

$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180°$

$S_{трап} = \dfrac{a+b}{2} \cdot h$

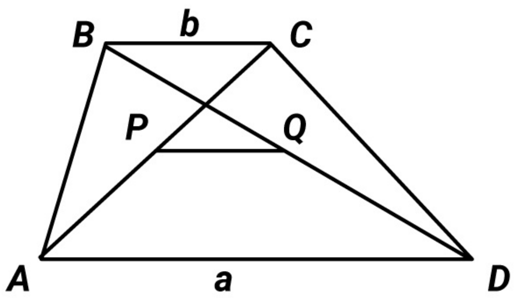
</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>

M – середина AB, N – середина CD.

MN – средняя линия трапеции.

$MN \parallel AD$, $MN \parallel BC$,

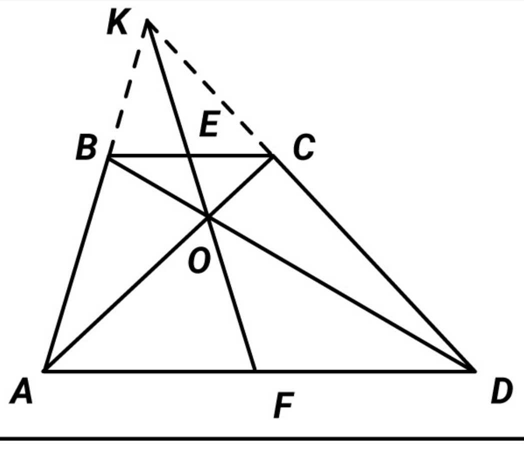
$MN = \dfrac{a+b}{2}$

</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>

Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.

P – середина AC, Q – середина BD.

$PQ = \dfrac{a-b}{2}$

</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>

$K = (AB) \cap (CD)$;

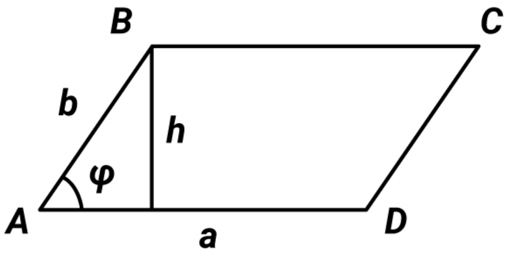
E - середина BC, F – середина AD,

$O = AC \cap BD$.

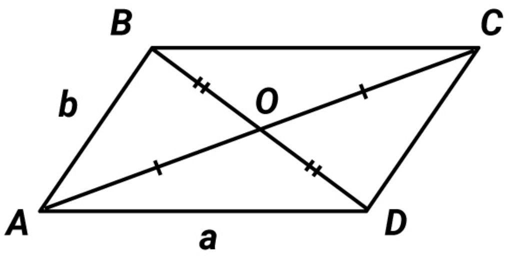
Замечательное свойство трапеции: середины оснований, точка пересечения диагоналей трапеции и точка пересечения продолжений ее боковых сторон лежат на одной прямой.

</td>
</tr>
</table>

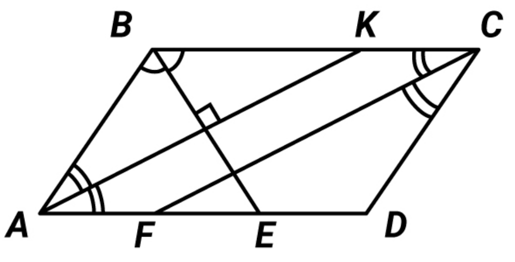
***Параллелограмм* –** четырехугольник, имеющий две пары параллельных сторон.
***AB* || *CD*, *AD* || *BC*.**

<table>
<tr>
<td>


$S = a \cdot h = ab\sin\varphi$
</td>
<td>
Четырехугольник является параллелограммом, если его противоположные стороны параллельны и равны.

$AB \parallel CD,\ AB = CD \Rightarrow ABCD$ – параллелограмм.
</td>
</tr>
<tr>
<td>


</td>
<td>
Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам.

$AO = OC,\ BO = OD$.
</td>
</tr>
<tr>
<td>


$AK \parallel CF,\ AK \perp BE.$
</td>
<td>
Биссектрисы противоположных углов параллелограмма параллельны.

Биссектрисы соседних углов параллелограмма перпендикулярны.

Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник.

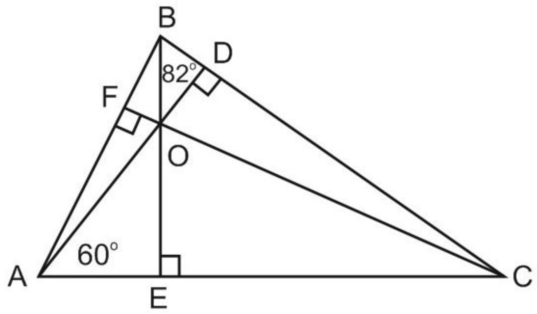
$AB = AE,\ DF = CD.$
</td>
</tr>
</table>

11. Найдите сторону квадрата, диагональ которого равна $\sqrt{8}$.

Пусть a – сторона квадрата. Тогда диагональ равна $a\sqrt{2}$, и значит, $a = 2$.

Ответ: 2.

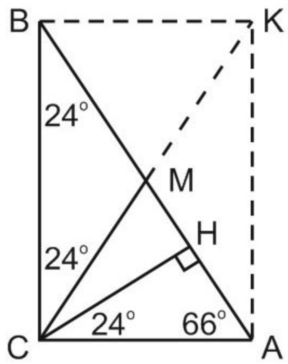
12. В треугольнике ABC угол A равен $60°$, *угол B равен* $82°$. *AD, BE и CF – высоты, пересекающиеся в точке O. Найдите угол AOF. Ответ дайте в градусах.*



Рассмотрим четырехугольник BFOD. Углы F и D в нем – прямые, угол B равен $82°$. Сумма углов любого четырехугольника равна $360°$, следовательно, угол FOD равен $98°$, а угол AOF – смежный с ним – равен $82°$.

Ответ: 82.

13. Острые углы прямоугольного треугольника равны $24°$ *и* $66°$. *Найдите угол между высотой и медианой, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.*



По свойству высоты, проведенной из вершины прямого угла,

$\angle ACH = \angle ABC = 24°$.

Рассмотрим треугольник BMC. Как вы думаете, что можно сказать об отрезках BM и CM?

Внимание! Сейчас мы сформулируем и докажем теорему:

В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

В самом деле, достроим треугольник ABC до прямоугольника ACBK.

Диагонали прямоугольника равны и делятся пополам в точке пересечения. Значит, BM = CM.

То, что мы только что сделали – пример **математического доказательства**.

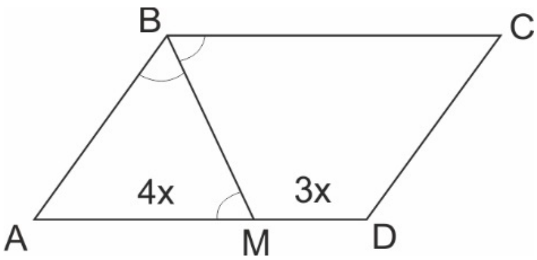
Итак, BM = CM, значит, треугольник BMC равнобедренный, и угол BCM равен 24°.

Тогда угол MCH (между медианой и высотой треугольника ABC) равен

$90° - 24° - 24° = 42°$.

Ответ: 42.

14. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении 3:4, считая от вершины тупого угла. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 88.



Пусть BM – биссектриса тупого угла B. По условию, отрезки MD и AB равны 3x и 4x соответственно.

Рассмотрим углы CBM и BMA. Поскольку AD и BC параллельны, BM – секущая, углы CBM и BMA являются накрест лежащими. Мы знаем, что накрест лежащие углы равны. Значит, треугольник ABM – равнобедренный, следовательно, AB = AM = $4x$.

Периметр параллелограмма – это сумма всех его сторон, то есть

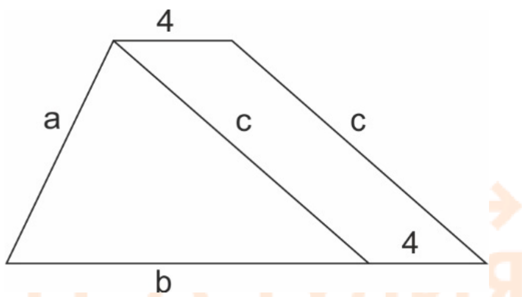
$7x + 7x + 4x + 4x = 88$.

Отсюда $x = 4$,

$7x = 28$.

Ответ: 28.

15. Прямая, проведенная параллельно боковой стороне трапеции через конец меньшего основания, равного 4, отсекает треугольник, периметр которого равен 15. Найдите периметр трапеции.



Это легкая задача – все видно на чертеже. Пусть стороны треугольника, о котором говорится в условии, равны a, b и c. Тогда периметр трапеции равен

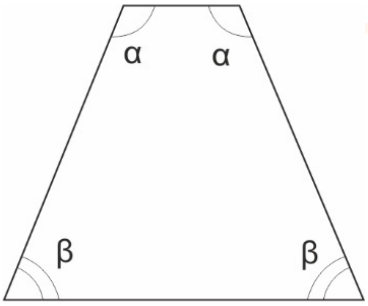
$a + b + 4 + c + 4 = a + b + c + 8 = 15 + 8 = 23$.

Мы воспользовались тем, что противоположные стороны параллелограмма равны.

Ответ: 23.

16. Чему равен больший угол равнобедренной трапеции, если известно, что разность противолежащих углов равна $50°$*? Ответ дайте в градусах.*

Напомним, что **равнобедренной** (или равнобокой) называется трапеция, у которой боковые стороны равны. Следовательно, равны углы при верхнем основании, а также углы при нижнем основании.



Давайте посмотрим на чертеж. По условию, $\alpha - \beta = 50°$, то есть $\alpha = \beta + 50°$.

Углы α и β – односторонние при параллельных прямых и секущей, следовательно,

$\alpha + \beta = 180°$.

Итак, $2\beta + 50° = 180°$

$\beta = 65°$, тогда $\alpha = 115°$.

Ответ: 115.

17. Найдите высоту ромба, сторона которого равна $\sqrt{3}$*, а острый угол равен* $60°$.

Один из подходов к решению задач по геометрии – **метод площадей**. Он состоит в том, что площадь фигуры выражается двумя разными способами, а затем из полученного уравнения находится неизвестная величина.

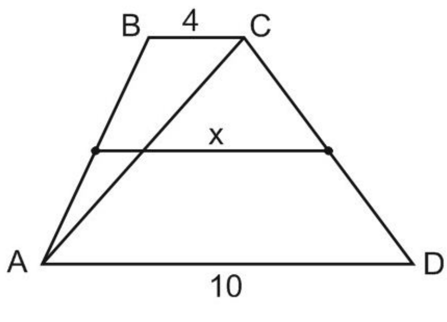
Пусть a – сторона ромба. Тогда

$S = a^2 \sin 60° = ah$,

$3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}h$.

Отсюда $h = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

18. Основания трапеции равны 4 и 10. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из ее диагоналей.

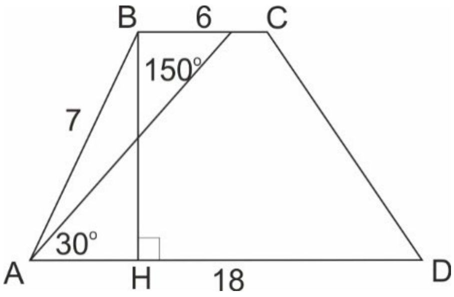


Скажите, что вы видите на чертеже? Можно сказать, что изображена трапеция ABCD, и в ней проведена средняя линия. А можно увидеть и другое – два треугольника, ABC и ACD, в которых проведены средние линии. Продолжайте! Дальше все просто.

Средняя линия треугольника равна половине основания, значит, $x = \frac{1}{2}AD = 5$.

Ответ: 5

19. Основания трапеции равны 18 и 6, боковая сторона, равная 7, образует с одним из оснований трапеции угол 150. Найдите площадь трапеции.



По формуле площади трапеции, $S = \frac{a+b}{2}h$. Основания есть, осталось найти высоту. Углы A и B – односторонние при параллельных прямых и секущей, следовательно,

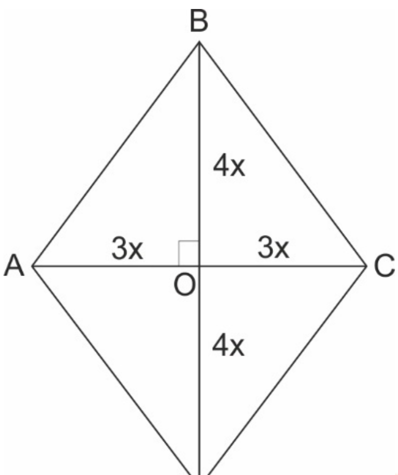
$\angle A = 180° - \angle B = 30°$. Проведем высоту BH. Найдем длину отрезка BH из прямоугольного треугольника ABH.

$BH = AB \cdot \sin 30° = 7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$.

Тогда площадь трапеции равна $\frac{6+18}{2} \cdot \frac{7}{2} = 42$.

Ответ: 42.

20. Диагонали ромба относятся как 3:4. Периметр ромба равен 200. Найдите высоту ромба.



Пусть диагонали ромба равны $6x$ и $8x$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник AOB.

По теореме Пифагора $AB^2 = AO^2 + OB^2$

$AB^2 = 9x^2 + 16x^2$,

$AB^2 = 25x^2$,

Отсюда AB = $5x$.

Поскольку периметр равен 200,

$5x \cdot 4 = 200$

$x = 10$, $AB = 50$, а диагонали ромба равны 60 и 80.

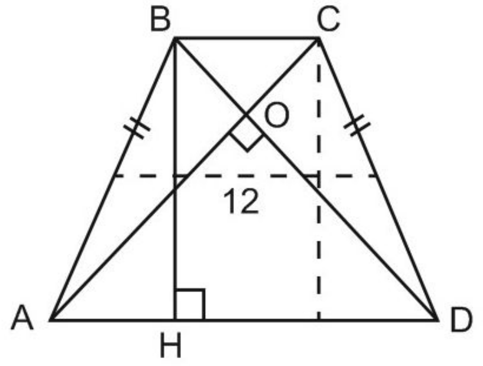
Нам надо найти высоту ромба.

Давайте применим метод площадей. С одной стороны, $S = ah$. С другой стороны, площадь ромба складывается из площадей двух равных треугольников ABC и ADC, то есть равна 60·40 = 2400.

Отсюда $h = S : a = 2400 : 50 = 48.$

Ответ: 48.

21. В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Высота трапеции равна 12. Найдите ее среднюю линию.



На первый взгляд кажется, что данных не хватает. Основания не даны, только высота. Но на самом деле задача составлена корректно. Ведь мы знаем, что трапеция равнобедренная и ее диагонали перпендикулярны.

Треугольник AOD – прямоугольный и равнобедренный, значит, $\angle OAD = \angle ODA = 45°$. Значит, треугольник BHD – тоже прямоугольный и равнобедренный.

Отсюда BH = HD = 12.

Выразим отрезок HD через основания трапеции AD и BC.

$HD = AD - AH = AD - \frac{AD-BC}{2} = \frac{AD+BC}{2}$.

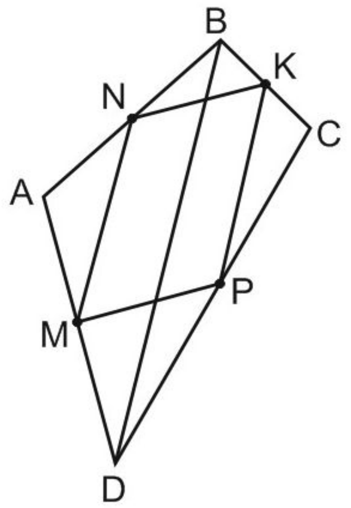
Оказывается, отрезок HD равен средней линии трапеции!

Ответ: 12.

22. Диагонали четырехугольника равны 4 и 5. Найдите периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырехугольника.

Обратите внимание, что в условии не сказано, какой это четырехугольник. Мы не будем рисовать его красивее, чем он есть. Пусть это будет произвольный четырехугольник – все стороны разные, углы тоже все разные.

Пусть AC = 4, BD = 5. Отметим середины сторон, соединим их по порядку и посмотрим, что получилось.



Рассмотрим треугольник ABD. В нем NM – средняя линия. Она параллельна BD и равна половине BD, то есть 2,5. Тогда KP – средняя линия треугольника BDC. Она тоже параллельна BD и равна половине BD, то есть 2,5.

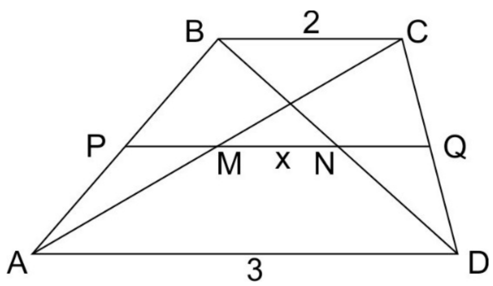
Аналогично, NK и MP параллельны AC,

$NK = MP = \frac{1}{2}AC = 2.$

Противоположные стороны четырехугольника MNKP попарно параллельны. Значит, MNKP – параллелограмм. Его периметр равен сумме всех сторон, то есть 9.

Ответ: 9.

23. Основания трапеции равны 3 и 2. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции.



Проведем PQ – среднюю линию трапеции, PQ = 2,5. Легко доказать, что отрезок MN, соединяющий середины диагоналей трапеции, лежит на средней линии.

PM – средняя линия треугольника ABC, значит, PM = 1.

NQ – средняя линия треугольника BCD, значит, NQ = 1.

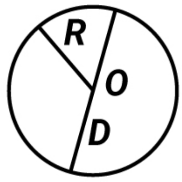
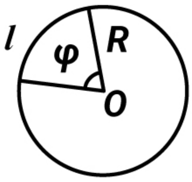
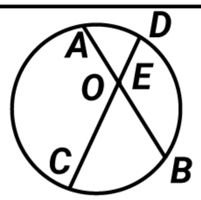
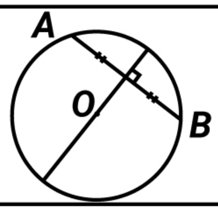
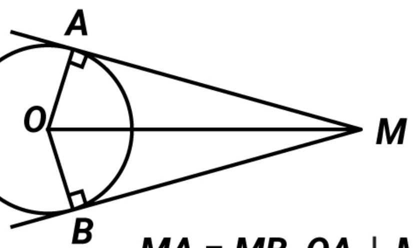
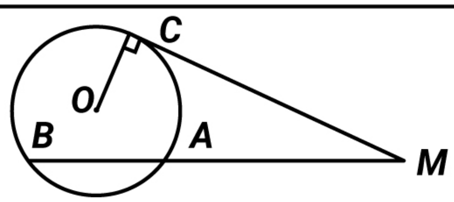
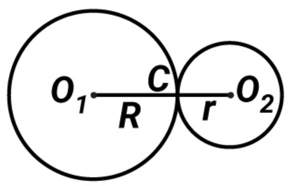
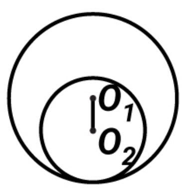
Тогда $MN = PQ - PM - NQ = 2,5 - 1 - 1 = 0,5$

Ответ: 0,5.

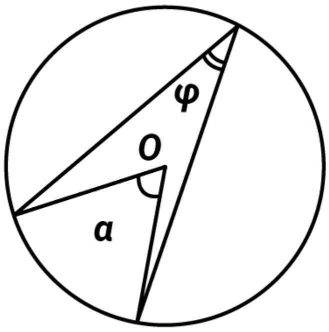
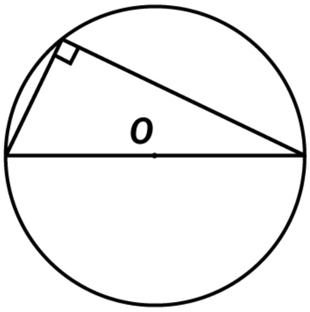
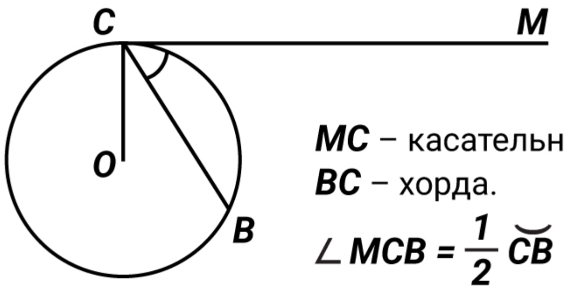
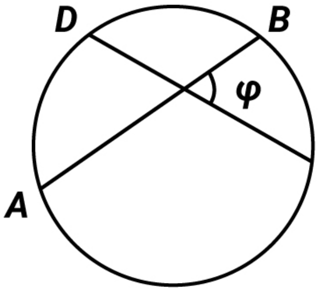
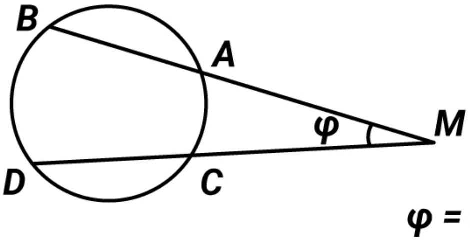
Следующая тема – окружность, круг и все связанные с ними задачи.

Окружность и круг

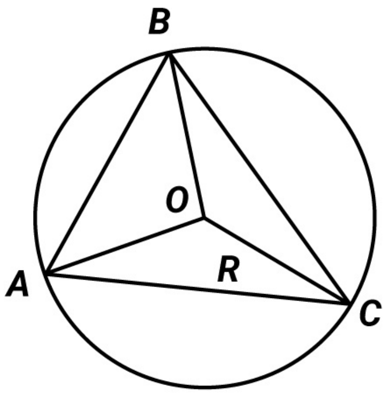
Число π равно отношению длины окружности к ее диаметру. $\pi \approx 3{,}14159...$

	$L = 2\pi R$ – длина окружности $S = \pi R^2$ – площадь круга $D = 2R$ – диаметр окружности
	$l_{\text{дуги}} = \dfrac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi R$ – длина дуги $S_{\text{сектора}} = \dfrac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi R^2$ – площадь сектора
 $AE \cdot BE = CE \cdot DE$	***Хорда*** – отрезок, соединяющий две точки на окружности. Произведения отрезков пересекающихся хорд равны.
	Диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам.
 $MA = MB,\ OA \perp MA$	Отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны. Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла.
	***Теорема о секущей и касательной:*** Квадрат отрезка касательной равен произведению длин отрезков секущей. $MC^2 = MA \cdot MB$
	Внешнее касание окружностей: $O_1O_2 = R + r$
	Внутреннее касание окружностей: $O_1O_2 = R - r$

Центральный и вписанный угол

 ***α*** – центральный угол, ***φ*** – вписанный угол. $\varphi = \alpha/2$	Величина центрального угла равна угловой величине дуги, на которую он опирается. Величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги, на которую он опирается. Вписанные углы, опирающиеся на равные дуги или на одну и ту же дугу, равны. Равные дуги стягиваются равными хордами.
	Вписанный угол, опирающийся на диаметр, - прямой.
 ***MC*** – касательная, ***BC*** – хорда. $\angle MCB = \frac{1}{2}\overset{\smile}{CB}$	Угол между хордой и касательной, проведенной через конец этой хорды, равен половине угловой величины дуги, лежащей внутри этого угла.
 $\varphi = \frac{\overset{\smile}{AD} + \overset{\smile}{BC}}{2}$	Угол между пересекающимися хордами равен полусумме заключенных между ними дуг.
 $\varphi = \frac{\overset{\smile}{BD} - \overset{\smile}{AC}}{2}$	Угол между секущими (с вершиной вне окружности) равен полуразности угловых величин дуг, заключенных внутри угла.

Вписанные и описанные треугольники



Центр окружности, описанной вокруг треугольника,- это точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

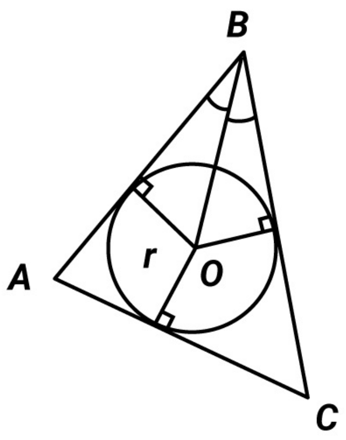
OA = OB = OC

Центр описанной окружности равноудален от вершин треугольника.

$$\frac{AB}{\sin\angle C} = \frac{AC}{\sin\angle B} = \frac{BC}{\sin\angle A} = 2R$$

(теорема синусов)

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R}$$



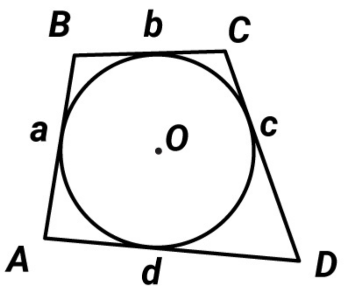
Центр окружности, вписанной в треугольник,- это точка пересечения биссектрис треугольника.

Центр вписанной окружности равноудален от сторон треугольника.

$S_{\triangle ABC} = p \cdot r$, где $p = \dfrac{AB + BC + AC}{2}$

Описанные и вписанные четырехугольники

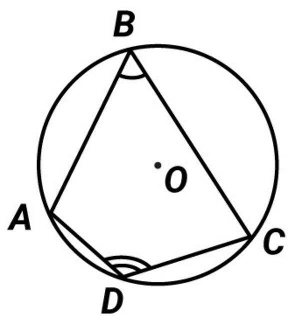
Описанный четырехугольник



$a + c = b + d$

Окружность можно вписать в четырехугольник тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны.

Вписанный четырехугольник



$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$

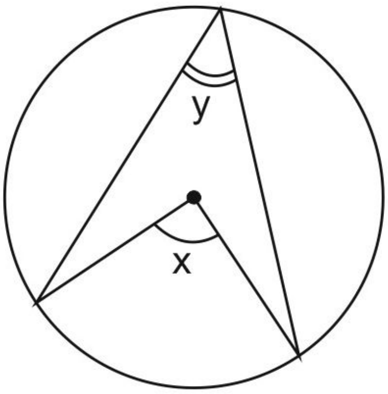
Окружность можно описать вокруг четырехугольника тогда и только тогда, когда суммы его противоположных углов равны ***180°***

24. Чему равен вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности? Ответ дайте в градусах.

Вписанный угол, опирающийся на диаметр, – прямой.

Ответ: 90.

25. Центральный угол на 36° больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите вписанный угол. Ответ дайте в градусах.



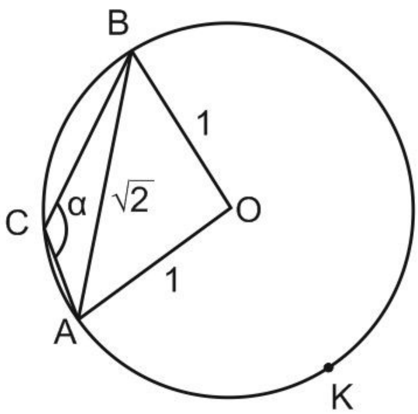
Пусть центральный угол равен x, а вписанный угол, опирающийся на ту же дугу, равен y. Мы знаем, что $x = 2y$.

Отсюда $2y = 36 + y$,

$y = 36$.

Ответ: 36.

26. Радиус окружности равен 1. Найдите величину тупого вписанного угла, опирающегося на хорду, равную $\sqrt{2}$. Ответ дайте в градусах.



Пусть хорда AB равна $\sqrt{2}$. Тупой вписанный угол, опирающийся на эту хорду, обозначим α.

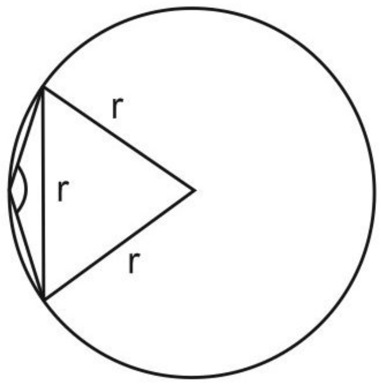
В треугольнике AOB стороны AO и OB равны 1, сторона AB равна $\sqrt{2}$. Нам уже встречались такие треугольники. Очевидно, что треугольник AOB – прямоугольный и равнобедренный, то есть угол AOB равен 90°.

Тогда дуга ACB равна 90°, а дуга AKB равна $360° - 90° = 270°$.

Вписанный угол α опирается на дугу AKB и равен половине угловой величины этой дуги, то есть 135°.

Ответ: 135.

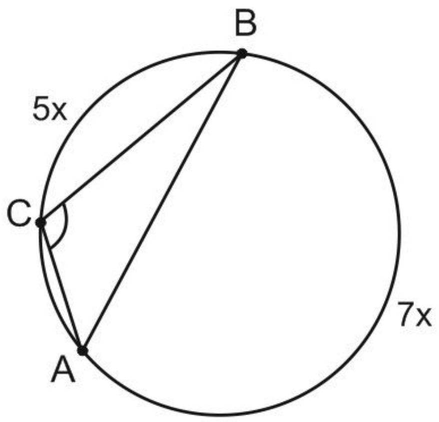
27. Чему равен тупой вписанный угол, опирающийся на хорду, равную радиусу окружности? Ответ дайте в градусах.



Эта задача похожа на предыдущую. Вы без труда решите ее сами.

Ответ: 150.

28. Хорда AB делит окружность на две части, градусные величины которых относятся как 5:7. Под каким углом видна эта хорда из точки C, принадлежащей меньшей дуге окружности? Ответ дайте в градусах.



Главное в этой задаче – правильный чертеж и понимание условия. Как вы понимаете вопрос: «Под каким углом хорда видна из точки C?»

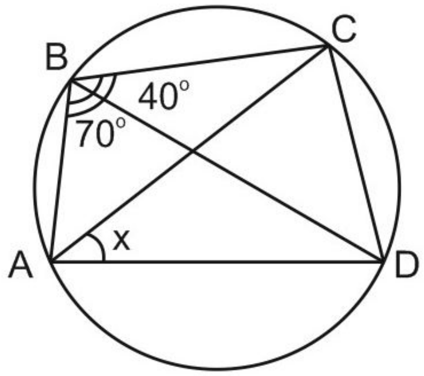
Представьте, что вы сидите в точке C и вам необходимо видеть всё, что происходит на хорде AB. Так, как будто хорда AB – это экран в кинотеатре :-)

Очевидно, что нужно найти угол ACB.

Сумма двух дуг, на которые хорда AB делит окружность, равна 360°, то есть $5x + 7x = 360°$. Отсюда $x = 30°$, и тогда вписанный угол ACB опирается на дугу, равную 210°. Величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги, на которую он опирается, значит, угол ACB равен 105°.

Ответ: 105°.

29. Четырехугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABC равен $110°$*, угол ABD равен* $70°$*. Найдите угол CAD. Ответ дайте в градусах.*

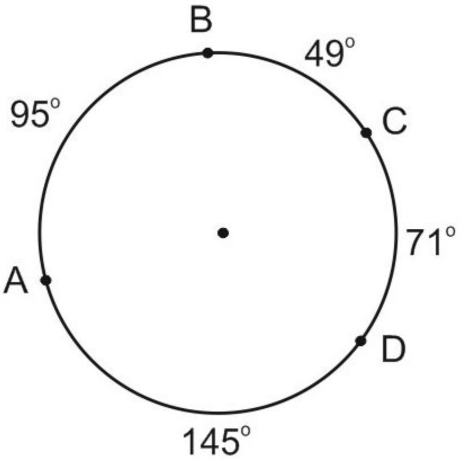


Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

Угол CAD опирается на ту же дугу, что и угол CBD, который равен $110° - 70° = 40°$.

Ответ: 40.

30. Стороны четырехугольника ABCD AB, BC, CD и AD стягивают дуги описанной окружности, градусные величины которых равны соответственно $95°$*,* $49°$*,* $71°$*,* $145°$*. Найдите угол B этого четырехугольника. Ответ дайте в градусах.*

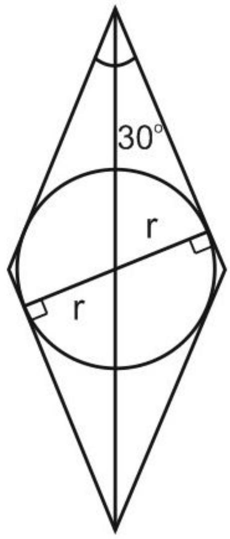


По условию, четырехугольник ABCD вписан в окружность.

Угол B опирается на дугу ADC, равную $145° + 71° = 216°$ и равен половине этой дуги, то есть $108°$.

Ответ: 108.

31. Острый угол ромба равен $30°$*. Радиус вписанной в этот ромб окружности равен 2. Найдите сторону ромба.*



Окружность вписана в ромб. Это значит, что она касается всех сторон ромба. Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания, и значит, диаметр окружности равен высоте ромба.

Применим метод площадей. О нем рассказано в задаче 17. Выразите площадь ромба двумя способами и найдите сторону ромба.

Пусть a - сторона ромба. Тогда

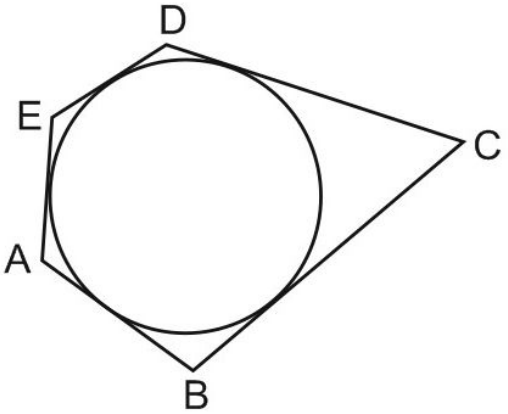
$S = a^2 \cdot \sin 30° = ah.$

$\frac{1}{2}a^2 = a \cdot 4$

Отсюда $a = 8.$

Ответ: 8.

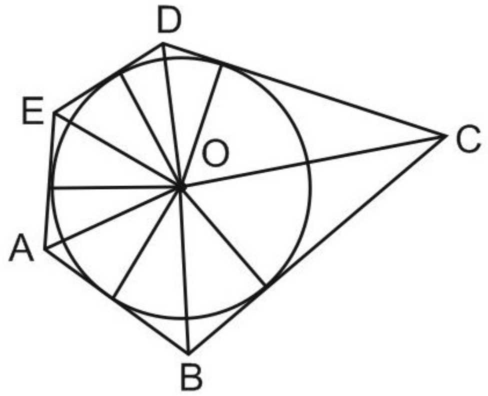
32. Около окружности описан многоугольник, площадь которого равна 5. Его периметр равен 10. Найдите радиус этой окружности.



Обратите внимание, что в условии даже не сказано, сколько сторон у этого многоугольника. Видимо, это неважно. Пусть их будет пять, как на рисунке.

Окружность касается всех сторон многоугольника. Давайте отметим центр окружности – точку O – и проведем перпендикулярные сторонам радиусы в точки касания.

Давайте также соединим точку O с вершинами A, B, C, D, E. Мы получили треугольники AOB, BOC, COD, DOE и EOA.



Очевидно, что площадь многоугольника $S = S_{\text{AOB}} + S_{\text{BOC}} + S_{\text{COD}} + S_{\text{DOE}} + S_{\text{EOA}}$.

Как вы думаете, чему равны высоты всех этих треугольников и как, пользуясь этим, найти радиус окружности?

Высоты всех треугольников одинаковы и равны радиусу окружности, то есть r.

По формуле площади треугольника,

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot r$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} BC \cdot r$$

$$S_{COD} = \frac{1}{2} CD \cdot r$$

$$S_{DOE} = \frac{1}{2} DE \cdot r$$

$$S_{EOA} = \frac{1}{2} EA \cdot r$$

Тогда $S = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DE + EA) \cdot r = \frac{1}{2} P \cdot r$, где P – периметр, то есть сумма всех сторон многоугольника.

Мы получили, что

$\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot r = 5.$

$r = 1.$

Ответ: 1.

В этой главе мы вспомнили формулы планиметрии и основные свойства геометрических фигур. Это основы, необходимый минимум, позволяющий решить на ЕГЭ геометрические задачи из части 1.

А если вам нужна более серьезная подготовка? С чего начать?

Мой ответ: начинайте с задач на доказательство. В моем Справочнике вы найдете список из 32 полезных фактов, помогающих решать задачи по геометрии. Докажите их все. Если трудно сделать это самостоятельно - доказательства полезных фактов есть в моей книге "ЕГЭ по математике. Секретные приемы репетитора" и на сайте.

Следующий шаг – так называемые "классические схемы" для решения задач по планиметрии. Они также приведены в Справочнике, а их доказательства - в книге "ЕГЭ по математике. Секретные приемы репетитора" и на сайте. После этого – решение задач ЕГЭ, от простых к сложным.

Буду рада, если мы пройдем этот увлекательный путь вместе, на моем Онлайн-курсе подготовки к ЕГЭ.

На занятиях курса мы разберем множество интересных задач. Вы увидите, как проста и красива геометрия Евклида; как из самых очевидных утверждений – их называют аксиомы – вырастает стройная и взаимосвязанная система. Вы поймете, что такое математическое доказательство, и это поможет вам в вузе, когда будете изучать высшую математику.

А то был у меня случай на занятиях. Прошу ученика доказать, что сумма углов треугольника равна 180 градусов, а он отвечает: «Точняк, сто восемьдесят. Мамой клянусь!» :-)

Каждая, даже простая геометрическая задача на доказательство учит вас отстаивать свое мнение, основанное не на догадках и эмоциях, а на знаниях. Вы начнете мыслить самостоятельно и получать удовольствие от самого процесса поиска истины.

Только – и это очень важно! – не заглядывайте раньше времени в ответ, не ищите готовых решений. Евклид – древнегреческий математик – сказал об этом задолго до нашего рождения.

По легенде, Евклид обучал геометрии царя Птолемея, и царь пожелал узнать, нет ли в этой науке более простого пути. «В геометрии нет царских дорог», – ответил Евклид.

Глава 11. Стереометрия. Задания Части 1 ЕГЭ

Наша следующая тема – стереометрия.

Часто в задачах по стереометрии требуется посчитать объем тела или площадь его поверхности. Или каким-то образом использовать эти данные. Поэтому заглянем в толковый словарь русского языка и уточним понятия.

Объем – величина чего-либо в длину, ширину и высоту, измеряемая в кубических единицах.

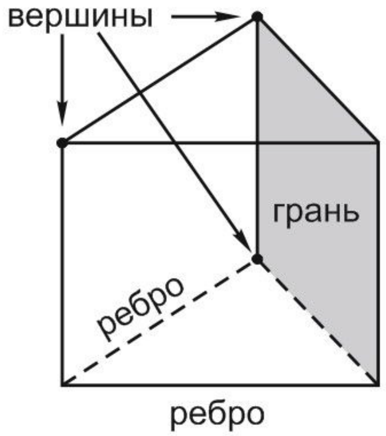
Другими словами, чем больше объем, тем больше места тело занимает в трехмерном пространстве.

Площадь – величина чего-нибудь в длину и ширину, измеряемая в квадратных единицах.

Представьте себе, что вам нужно оклеить всю поверхность объемного тела. Сколько квадратных сантиметров (или метров) вы бы обклеили? Это и есть площадь поверхности.

Объемные тела – это **многогранники** (куб, параллелепипед, призма, пирамида) и **тела вращения** (цилиндр, конус, шар).

Если в задаче по стереометрии речь идет о многограннике, вам встретятся термины «вершины» «грани» и «ребра». Вот они, на картинке.



Чтобы найти площадь поверхности многогранника, сложите площади всех его граней.

Вам могут также встретиться понятия «прямая призма, правильная призма, правильная пирамида».

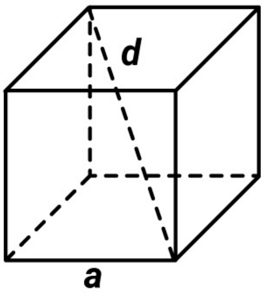
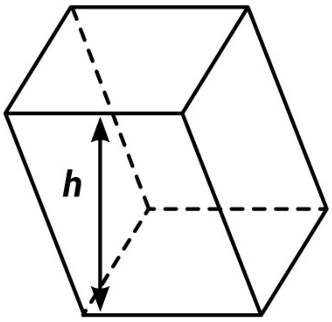
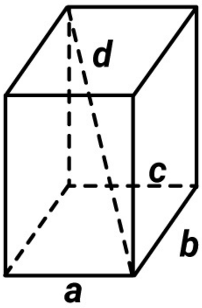
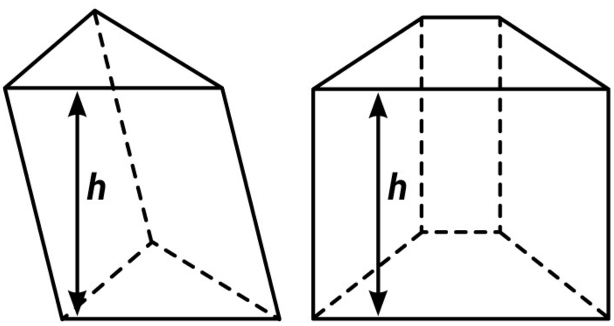
Прямой называется призма, боковые ребра которой перпендикулярны основанию.

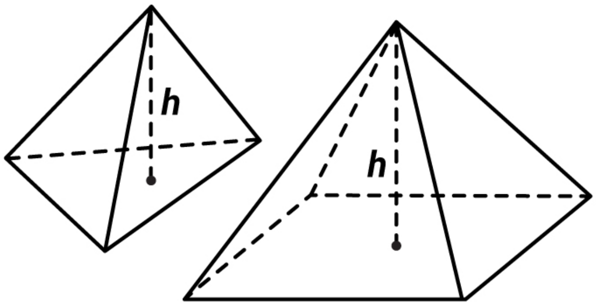
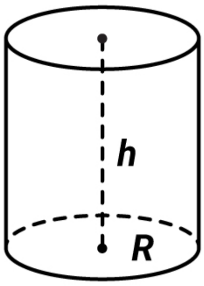
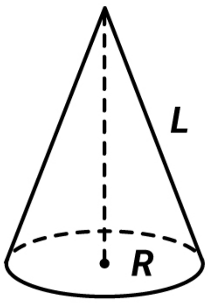
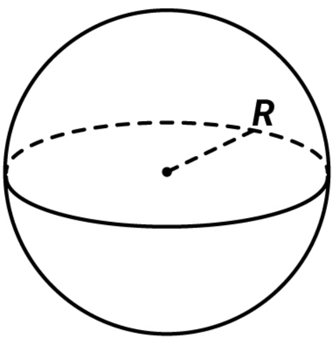
Если призма – прямая и в ее основании лежит правильный многоугольник, призма будет называться правильной.

А правильная пирамида – такая, в основании которой лежит правильный многоугольник, а вершина проецируется в центр основания.

Для решения задач по стереометрии вам понадобятся формулы (они в таблицах), логика и сообразительность.

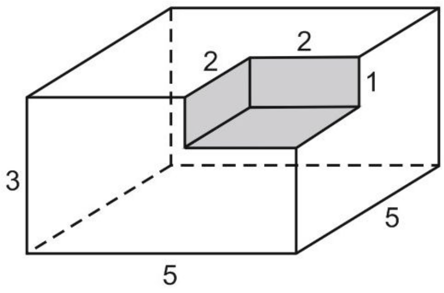
Начнем с формул объема и площади поверхности.

Многогранники	***Объем и площадь поверхности***
Куб  $d = a\sqrt{3}$ - длина диагонали	$V = a^3$ $S = 6a^2$ ***a*** – ребро куба
Параллелепипед 	$V = S_{осн} \cdot h$ $S_{осн}$ - площадь основания ***h*** - высота Площадь поверхности параллелепипеда равна сумме площадей всех его граней
Прямоугольный параллелепипед  $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ - длина диагонали	$V = a \cdot b \cdot c$ $S = 2ab + 2bc + 2ac$
Призма 	$V = S_{осн} \cdot h$ $S = 2S_{осн} + S_{бок}$

Многогранники	Объем и площадь поверхности
Пирамида 	$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$ $S = S_{осн} + S_{бок}$
Тела вращения	**Объем и площадь поверхности**
Цилиндр  ***h*** - высота цилиндра.	$V = \pi R^2 \cdot h$ $S = 2S_{осн} + S_{бок} = 2\,\pi R^2 + 2\pi Rh$
Конус  $L = \sqrt{R^2 + h^2}$ - образующая	$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$ $S = S_{осн} + S_{бок} = \pi R^2 + \pi RL$
Шар 	$V = \frac{4}{3} \pi R^3$ $S = 4\pi R^2$

Перейдем сразу к практике, то есть к экзаменационным задачам.

1. Найдем объем или площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке.



Что тут нарисовано? Очевидно, это большой параллелепипед, из которого вырезан «кирпичик», так что получилась «полочка». Если вы увидели на рисунке что-то другое – обратите внимание на сплошные и штриховые линии. Сплошные линии – видимы. Штриховыми линиями показываются те ребра, которые мы не видим, - они находятся сзади, то есть закрыты другими гранями.

Объем найти просто. Из объема большого «кирпича», то есть параллелепипеда, вычитаем объем маленького «кирпича». Получаем: 75 - 4 = 71.

А как быть с площадью поверхности?

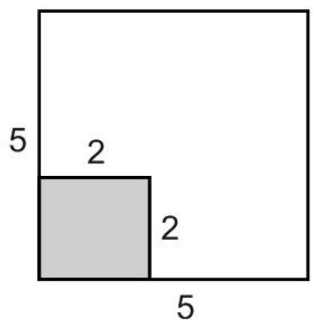
Почему-то многие школьники пытаются посчитать ее по аналогии с объемом, как разность площадей большого и малого «кирпичей».

В ответ на такое «решение» я предлагаю детскую задачу – если у четырехугольного стола отпилить один угол, сколько углов у него останется? :-)

На самом деле нам нужно посчитать сумму площадей всех граней – верхней, нижней, передней, задней, правой, левой, а также сумму площадей трех маленьких прямоугольников, которые образуют «полочку». Можно сделать это «в лоб», напрямую. Но есть способ проще.

Прежде всего, если бы из большого параллелепипеда ничего не вырезали, его площадь поверхности была бы равна 110. А как повлияет на него вырезанная «полочка»?

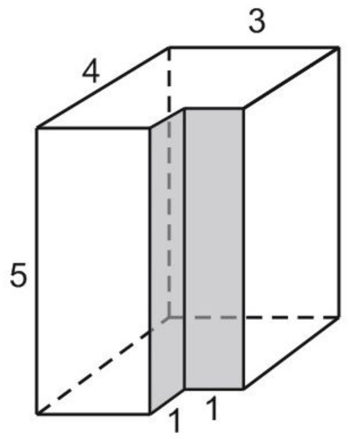
Давайте посчитаем сначала площадь всех горизонтальных участков, то есть нижнего основания, верхнего основания (из которого вырезан кусочек) и горизонтальной грани «полочки». С нижним основанием – все понятно, оно прямоугольное, его площадь равна $5 \cdot 5 = 25$. А вот сумма площадей верхнего основания и горизонтальной грани «полочки» тоже равна 25! Посмотрите на них сверху.



…В этот момент и наступает понимание. Кому-то проще нарисовать вид сверху. Кому-то – представить, что мы передвигаем дно и стенки полочки и получаем целый большой параллелепипед, площадь поверхности которого равна 110. Каким бы способом вы ни решали, результат один – площадь поверхности будет такой же, как и у целого параллелепипеда, из которого ничего не вырезали.

Ответ: 110.

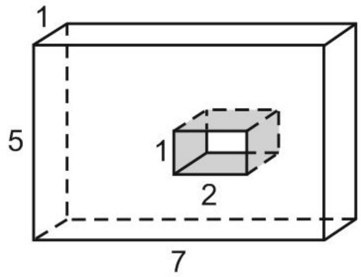
2. Здесь тоже надо найти площадь поверхности многогранника:



$S = 2 \cdot 12 + 2 \cdot 15 + 2 \cdot 20 - 2 = 72$

Из площади поверхности «целого кирпича» вычитаем площади двух квадратиков со стороной 1 – на верхней и нижней гранях.

3. Нарисована прямоугольная плитка с «окошком». Задание то же самое – надо найти площадь поверхности.



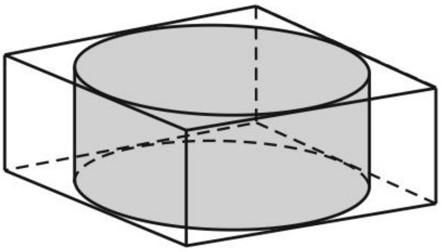
Сначала посчитаем сумму площадей всех граней.

Представьте, что вы дизайнер, а эта плитка – украшение. И вам надо оклеить эту плитку чем-то ценным, например, кристаллами Сваровски. И вы их покупаете на собственные деньги. (Я не знаю почему, но эта глупая фраза мгновенно повышает вероятность правильного ответа! :-) Оклеивайте все грани плитки. Но только из площадей передней и задней граней вычтите площадь «окошка». Теперь само окошко надо «оформить». Оклеивайте всю его «раму».

Правильный ответ: 96.

Какие еще задачи могут встретиться вам на экзамене? Например, такие, где одно объемное тело вписано в другое.

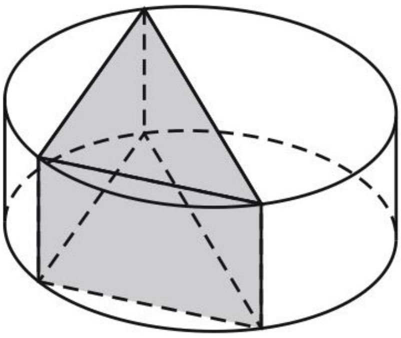
4. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1. Найдите объем параллелепипеда.



Прежде всего, заметим, что высота цилиндра равна высоте параллелепипеда. Нарисуйте вид сверху, то есть круг, вписанный в прямоугольник. Увидите, что этот прямоугольник – на самом деле квадрат, а сторона его в два раза больше, чем радиус вписанной в него окружности.

Площадь основания параллелепипеда равна 4, высота равна 1, объем равен 4

5. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Боковые ребра равны 4. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы. В ответ запишите $\frac{V}{\pi}$.

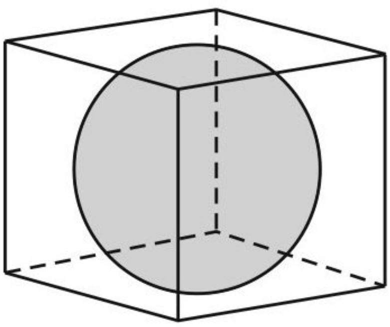


Очевидно, высота цилиндра равна боковому ребру призмы, то есть 4. Осталось найти радиус его основания.

Рисуем вид сверху. Прямоугольный треугольник вписан в окружность. Где будет находиться радиус этой окружности? Правильно, посередине гипотенузы. Гипотенузу находим по теореме Пифагора, она равна 10. Тогда радиус основания цилиндра равен 5. Находим объем цилиндра по формуле. Он равен 100π. В ответ (как и требуется в условии) запишем $\frac{V}{\pi}$.

Ответ: 100.

6. В прямоугольный параллелепипед вписан шар радиуса 1. Найдите объем параллелепипеда.



Задача проста. Нарисуйте вид сверху. Или сбоку. Или спереди. Что получается?

В любом случае вы увидите круг, вписанный в квадрат.

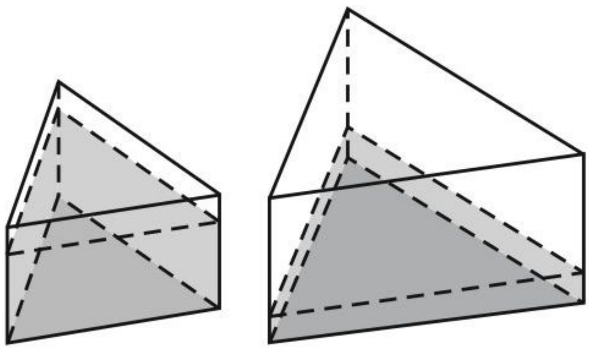
Можно даже ничего не рисовать, а просто представить себе шарик, который положили в коробочку так, что он касается всех стенок, дна и крышки. Ясно, что такая коробочка будет кубической формы.

Длина ребра этого куба в два раза больше, чем радиус шара.

Ответ: 8.

Вот еще один тип задач. Как изменятся объем и площадь поверхности, если мы увеличим или уменьшим какой-либо линейный размер (или размеры) объемного тела?

7. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 12 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если ее перелить в другой такой же сосуд, у которого сторона основания в 2 раза больше, чем у первого? Ответ выразите в сантиметрах.



Слова «другой такой же сосуд» означают, что другой сосуд тоже имеет форму правильной треугольной призмы. То есть в его основании – правильный треугольник, у которого все стороны в два раза больше, чем у первого. Во сколько раз площадь этого треугольника больше, чем у первого?

Запомним простое правило.

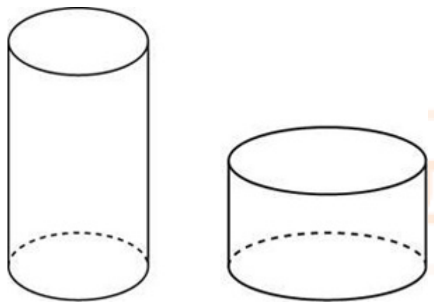
Если все линейные размеры фигуры увеличить в k раз – площадь увеличится в k^2 раз. Если все размеры объемного тела, то есть длину, ширину и высоту, увеличить в k раз – его площадь поверхности увеличится в k^2, а объем – в k^3 раз.

Это правило верно и для призмы, и для конуса, и для шара, то есть для любого объемного тела.

Площадь основания второго сосуда в 4 раза больше, чем у первого. Объем воды остался неизменным. Следовательно, в 4 раза уменьшится высота.

Ответ: 3.

8. Одна цилиндрическая кружка вдвое выше второй, зато вторая в два раза шире. Найдите отношение объема второй кружки к объему первой.



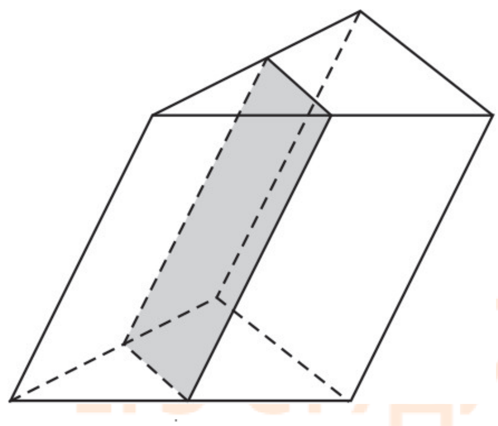
Вспомните, как мы решали стандартные задачи на движение и работу. Мы рисовали таблицу, верно? И здесь тоже нарисуем таблицу. Запишите, чему равны высота, радиус и объем для каждой кружки.

Объем цилиндра равен $\pi R^2 h$.

	высота	радиус	объем
первая кружка	h	R	$\pi R^2 h$
вторая кружка	$\frac{1}{2}h$	$2R$	$\frac{\pi(2\mathrm{R})^2 h}{2}$

Считаем объем второй кружки. Он равен $\frac{\pi(2R)^2 h}{2} = 2\pi R^2 h$. Получается, что он в два раза больше, чем объем первой.

9. Через среднюю линию основания треугольной призмы, объем которой равен 32, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем отсеченной треугольной призмы.

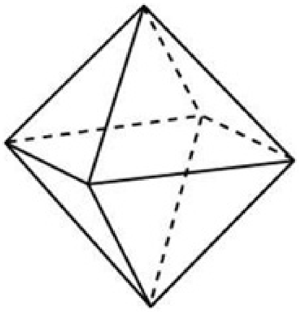


Здесь даже формулы не понадобятся! Высота меньшей призмы такая же, как у большой. А какой же будет ее площадь основания?

Очевидно, площадь основания меньшей призмы в 4 раза меньше, чем у большой. Ведь средняя линия треугольника равна половине основания. Значит, объем отсеченной призмы равен 8.

И еще одна классическая экзаменационная задача. Никаких формул!

10. Во сколько раз увеличится площадь поверхности октаэдра, если все его ребра увеличить в 3 раза?



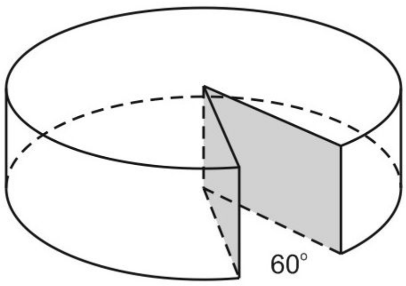
Только не надо обмирать от ужаса при слове «октаэдр». В переводе это слово означает «правильный восьмигранник». Он здесь нарисован и представляет собой две сложенные вместе четырехугольные пирамиды :-)

Мы уже говорили – если все ребра многогранника увеличить в три раза, площадь поверхности увеличится в 9 раз, поскольку $3^2 = 9$.

Ответ: 9.

Иногда требуется найти объем части цилиндра или части пирамиды.

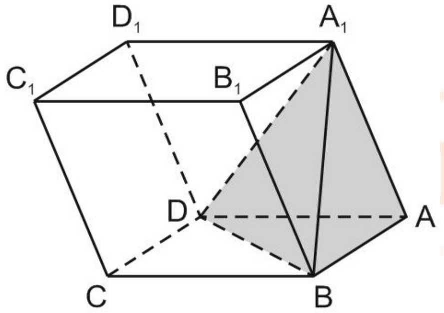
11. Найдите объем V части цилиндра, изображенной на рисунке, если радиус цилиндра равен 15, а его высота равна 5. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.



Изображен не целый цилиндр, а его часть. Из него, как из круглого сыра, вырезали кусок. Надо найти объем оставшегося «сыра».

Какая же часть цилиндра изображена? Вырезан сектор с углом 60 градусов, а 60° – это одна шестая часть полного круга. Значит, от всего объема цилиндра осталось пять шестых. Находим объем всего цилиндра, умножаем на пять шестых, делим на π, записываем ответ: 937,5.

12. Объем параллелепипеда равен 9. Найдите объем треугольной пирамиды $ABDA_1$.



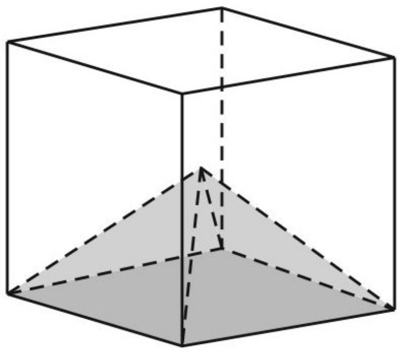
Мы помним, что объем параллелепипеда равен $S_{\text{осн}} \cdot h$.

А объем пирамиды равен $\frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot h$.

Иными словами, если у параллелепипеда и пирамиды одинаковые основания и одинаковые высоты, то объем пирамиды будет в три раза меньше, чем объем параллелепипеда. А у нашей пирамиды еще и площадь основания в два раза меньше. Значит, ее объем в шесть раз меньше объема параллелепипеда.

Ответ: 1,5.

13. Объем куба равен 12. Найдите объем четырехугольной пирамиды, основанием которой является грань куба, а вершиной – центр куба.



Один из способов решения задачи - посчитать, сколько нужно четырехугольных пирамидок, чтобы сложить из них такой кубик. Представьте, что куб сделан из проволоки, и вы вставляете пирамидки, вершиной внутрь, в каждую его грань – в верхнюю, нижнюю, правую, левую, переднюю и заднюю.

Вот другой способ решения этой задачи.

Если бы пирамида и куб имели одинаковые высоты, объем пирамиды был бы в 3 раза меньше объема куба (поскольку площади основания у них равны). А у нашей пирамиды высота в два раза меньше, чем у куба. Значит, ее объем будет в 6 раз меньше, чем у куба.

Ответ: 2.

14. Радиусы трех шаров равны 6, 8 и 10. Найдите радиус шара, объем которого равен сумме их объемов.

На самом деле это задача по алгебре. Объем шара равен $\frac{4}{3}\pi R^3$. Составьте уравнение и решите его.

$$\frac{4}{3}\pi 6^3 + \frac{4}{3}\pi 8^3 + \frac{4}{3}\pi 10^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$6^2 + 8^2 + 10^2 = R^2$$

$$R^2 = 1728$$

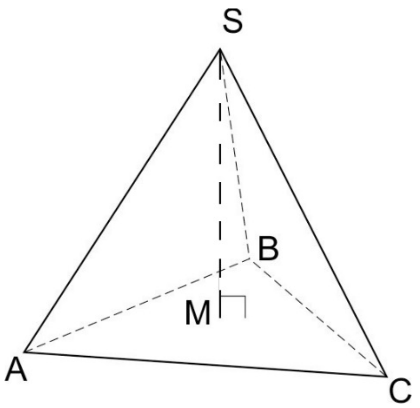
Как извлечь кубический корень из этого числа? Очень просто! Вспомним приемы быстрого счета и разложим 1728 на множители.

$$1728 = 8 \cdot 216 = 2^2 \cdot 6^3$$

$$R = 2 \cdot 6$$

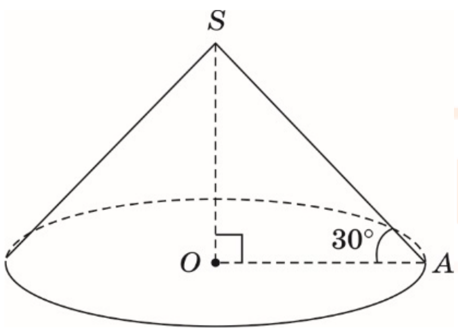
$$R = 12$$

15. Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 2, а объем равен $\sqrt{3}$.



В основании правильной треугольной пирамиды лежит правильный треугольник. У него все углы равны $60°$ и все стороны тоже равны. Площадь его проще всего найти по формуле $S = \frac{1}{2}a^2 \sin 60°$. Она равна $\sqrt{3}$. Поскольку $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$, высота равна 3.

16. Найдите объем V конуса, образующая которого равна 2 и наклонена к плоскости основания под углом 30 градусов. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.



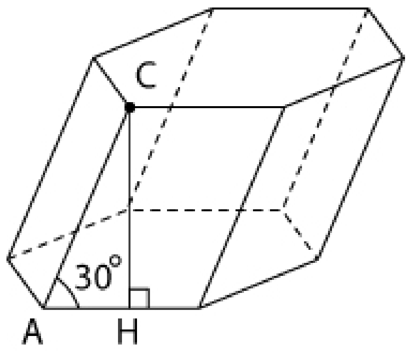
Если вы забыли, что такое образующая, – загляните в наш Справочник для подготовки к ЕГЭ. А что значит «наклонена к плоскости основания»?

Угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость, то есть угол OAS.

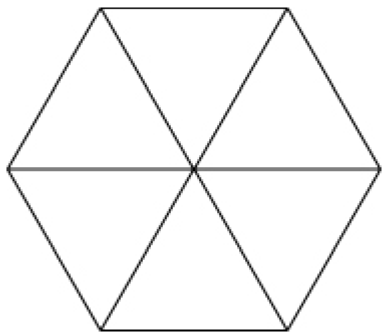
Из прямоугольного треугольника AOS находим, что $OS = h = 1$, $AO = R = \sqrt{3}$. Объем конуса найдем по известной формуле и поделим на π.

Ответ: 1.

17. Найдите объем призмы, в основаниях которой лежат правильные шестиугольники со сторонами 2, а боковые ребра равны $2\sqrt{3}$ и наклонены к плоскости основания под углом 30 градусов.



Нарисуйте вид сверху, то есть правильный шестиугольник. У него все стороны равны, все углы тоже равны.



Как найти площадь правильного шестиугольника, если специальную формулу вы не знаете?

Проще всего разбить его на 6 одинаковых равносторонних треугольников. Формула площади равностороннего треугольника вам известна:

$$S = \frac{1}{2}a^2 \sin 60°$$

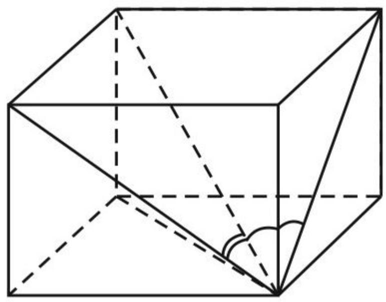
Подставив числа в формулу, получим, что площадь основания равна $6\sqrt{3}$. Теперь найдите высоту и объем.

Высота призмы – это отрезок, перпендикулярный ее основаниям. Из прямоугольного треугольника ACH находим:

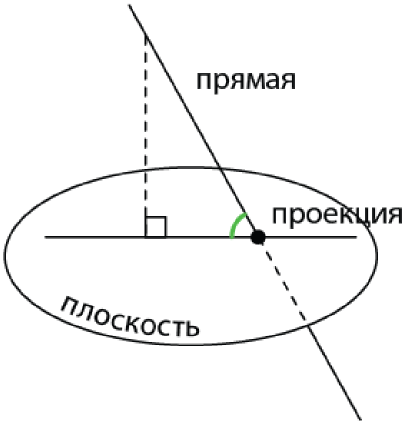
$h = \frac{1}{2}AC = \sqrt{3}.$

Ответ: 18.

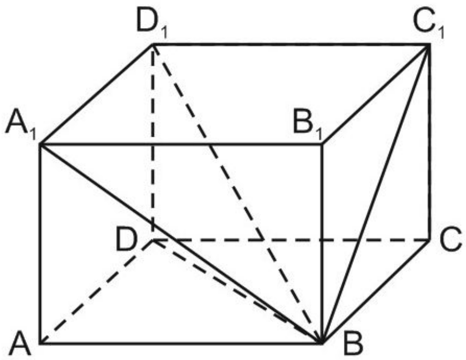
18. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна $\sqrt{2}$ и образует углы 30, 30 и 45 градусов с плоскостями граней параллелепипеда. Найдите объем параллелепипеда.



Мы уже говорили, что угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и ее проекцией на данную плоскость.



Обозначим вершины параллелепипеда.



Проекцией диагонали BD_1 на нижнее основание будет отрезок BD. Пусть диагональ образует угол 45 градусов именно с плоскостью нижнего основания.

Дальше – рассмотрите прямоугольный треугольник BDD_1 и найдите высоту параллелепипеда, а затем его длину и ширину.

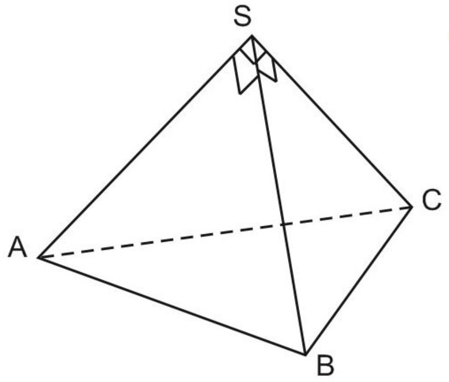
По теореме Пифагора, $BD = BD_1 \cdot \sin 45° = 1$. Итак, мы нашли высоту параллелепипеда.

Проекцией BD_1 на переднюю грань будет отрезок A_1B.

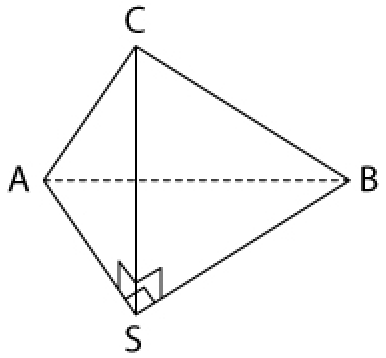
Из прямоугольного треугольника A_1BD_1 найдем $A_1D_1 = BD_1 \cdot \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Мы нашли ширину параллелепипеда. А его длина (то есть отрезок C_1D_1) находится аналогично. Она тоже равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Объем параллелепипеда равен $\frac{1}{2}$.

Ответ: 0,5.

19. Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно 3. Найдите объем пирамиды.



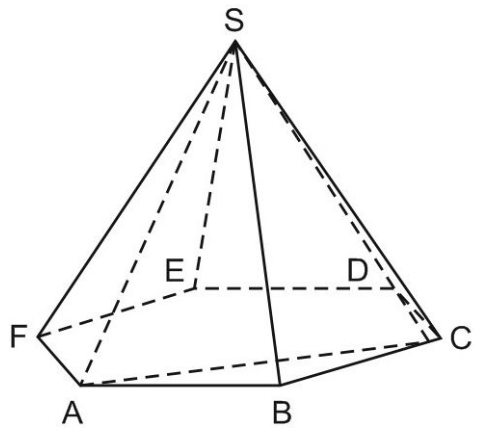
Если действовать «в лоб», считая, что ABC – основание, мы получим задачу уровня C2. Но зачем такие сложности? Покрутите чертеж. Посмотрите на него с другой точки зрения :-)



Объем пирамиды равен $\frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot h$. В основании лежит равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого равна 4,5. Тогда объем пирамиды равен 4,5.

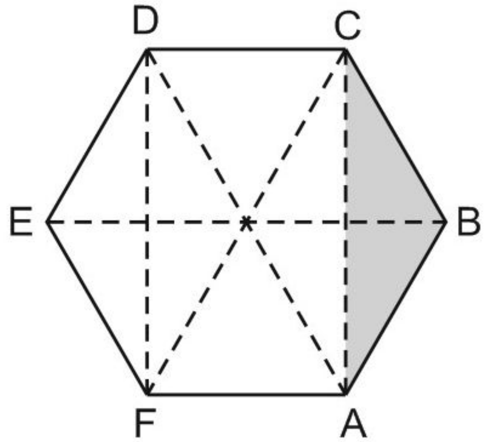
Ответ: 4,5.

20. Объем треугольной пирамиды SABC, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды SABCDEF, равен 1. Найдите объем шестиугольной пирамиды.



Треугольная и шестиугольная пирамиды, о которых говорится в условии задачи, имеют одинаковую высоту. Разные только площади основания. Нарисуйте вид снизу. Во сколько раз площадь основания треугольной пирамиды меньше, чем у шестиугольной?

Обратите внимание, что правильный шестиугольник удобнее всего разбить на треугольники. Если в задаче по стереометрии фигурирует шестиугольная пирамида или призма – вам пригодится этот прием.



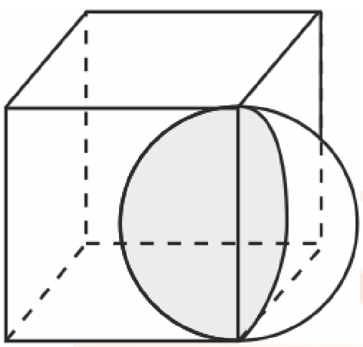
Видим, что площадь основания треугольной пирамиды в 6 раз меньше, чем площадь основания шестиугольной.

Ответ: 6.

Если в условии задачи есть рисунок – значит, повезло. Рисунок – это уже половина решения. А если его нет? Значит, рисуйте сами, как умеете. С каждым разом у вас будет получаться всё лучше и лучше. Отговорки «не умею» или «рисование у нас было только в детском саду» – не принимаются. Вам ведь не девочку на шаре надо изобразить, а намного более простые объекты :-)

21. Середина ребра куба со стороной 1,9 является центром шара радиуса 0,95. Найдите площадь части поверхности шара, лежащей внутри куба. В ответе запишите $\frac{S}{\pi}$.

Обратите внимание, что $0{,}95 \cdot 2 = 1{,}9$. Значит, сторона куба является диаметром шара. Осталось понять, какая часть шара лежит внутри куба. Нарисуем чертеж, и всё станет понятно:



Правильный ответ: 0,9025.

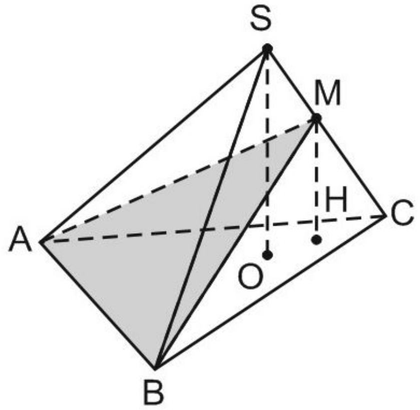
22. Вершина A куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной 1,6 является центром сферы, проходящей через точку A_1. Найдите площадь S части сферы, содержащейся внутри куба. В ответе запишите величину $\frac{S}{\pi}$.

Здесь главное – понять, какая часть шара лежит внутри куба. Порисуйте кубики и шарики. Возьмите яблоко (его форма близка к шарообразной), потренируйтесь. Можете взять луковицу :-) Сделайте это сейчас. Ведь на ЕГЭ вам не дадут килограмма яблок или лука для выработки пространственного мышления.

Ответ: 1,28.

23. Объем треугольной пирамиды равен 15. Плоскость проходит через сторону основания этой пирамиды и пересекает противоположное боковое ребро в точке, делящей его в отношении 1:2, считая от вершины пирамиды. Найдите больший из объемов пирамид, на которые плоскость разбивает исходную пирамиду.

Прежде всего, стоит разобраться, что значит «точка делит боковое ребро в отношении 1:2, считая от вершины»? Это значит, что она делит его на отрезки, длины которых x и $2x$.

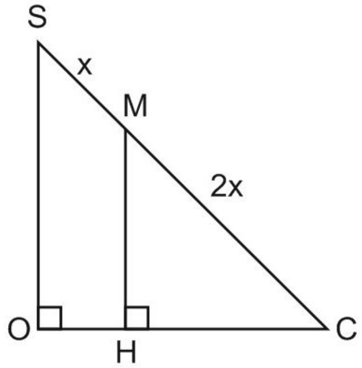


Плоскость ABM делит пирамиду ABCS на две. Видите их на рисунке? У пирамид ABCM и ABCS общее основание ABC. Ясно, что отношение их объемов равно отношению высот.

Проведем перпендикуляры SO и MH к плоскости основания пирамиды.

SO – высота пирамиды ABCS, MH – высота пирамиды ABCM.

Очевидно, что отрезок SO параллелен отрезку MH, поскольку два перпендикуляра к одной плоскости параллельны друг другу. Через две параллельные прямые можно провести плоскость, причем только одну. Итак, точки S, M, C, O и H лежат в одной плоскости, то есть мы от стереометрической задачи перешли к «плоской», планиметрической.



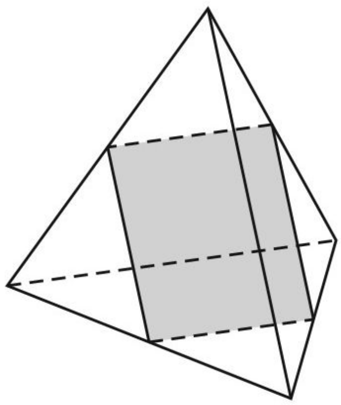
Треугольники SOC и MHC подобны.

$MC : SC = MH : SO = 2 : 3.$

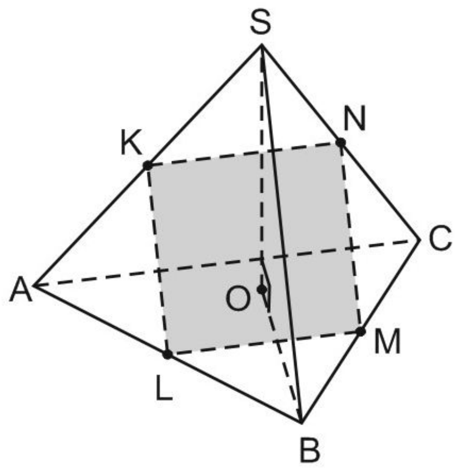
Значит, $MH = \frac{2}{3}SO$. Объем пирамиды ABCM равен $\frac{2}{3}$ объема пирамиды ABCS.

Ответ: 10.

24. Ребра тетраэдра равны 1. Найдите площадь сечения, проходящего через середины четырех его ребер.



Все ребра равны, значит, тетраэдр – правильный. Каждая его грань является правильным треугольником.



Заметим, что отрезок KL – средняя линия треугольника ASB.

Тогда MN = KL, поскольку MN – средняя линия треугольника BSC.

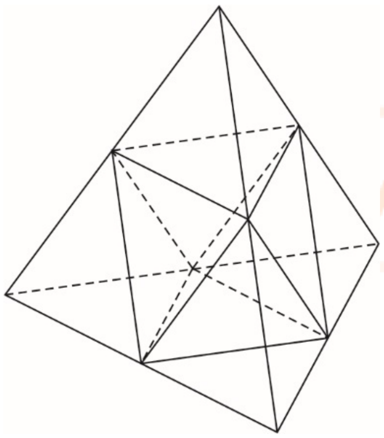
Аналогично, LM = KN = MN = KL. Значит, KLMN – ромб, все стороны которого равны 0,5.

Вспомните теорему о трех перпендикулярах. Постарайтесь доказать, что KLMN – квадрат.

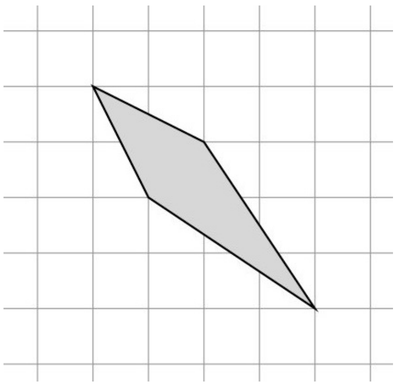
Площадь этого квадрата найти легко.

Ответ: 0,25.

25. Объем тетраэдра равен 1,9. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются середины сторон данного тетраэдра.



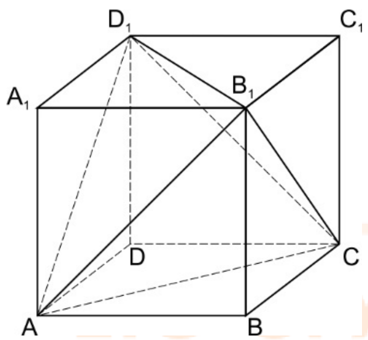
Можно долго искать формулу объема октаэдра (именно он там и находится, в середине), а можно поступить умнее.



Как получился многогранник в серединке? От исходного тетраэдра отрезали четыре маленьких тетраэдра, объем каждого из которых в 8 раз меньше, чем объем большого (поскольку сторона основания в два раза меньше). Получаем: $V-\frac{4}{8}V=\frac{1}{2}V$.

Ответ: 0,95.

26. Объем параллелепипеда равен 4,5. Найдите объем треугольной пирамиды AD_1CB_1.



Мы знаем, что объем параллелепипеда на рисунке равен 4,5, но не знаем, чему равны его длина, ширина и высота. Обозначим их a, b и c. Не так-то просто найти площадь основания и высоту пирамиды AD_1CB_1. Так может, и не надо этого делать?

Есть более удобный способ – тот же, что и в предыдущей задаче. Найдите объем пирамиды AD_1CB_1 как разность объемов. Что нужно отрезать от куба, чтобы получилась пирамида AD_1CB_1?

Пирамида AD_1CB_1 получается, если мы отрежем от параллелепипеда четыре пирамиды по углам – $ABCB_1$, $D_1B_1CC_1$, $AA_1D_1B_1$ и $ADCD_1$. А объем каждой из них легко посчитать – так, как мы делали в первой задаче этой главы. Например, объем пирамиды $ABCB_1$ равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда. Объем всех четырех пирамид, которые отрезали, равен $\frac{2}{3}$ объема параллелепипеда.

Значит, объем пирамиды AD_1CB_1 равен $\frac{1}{3}$ объема параллелепипеда.

Ответ: 1,5.

Глава 12. Векторы на ЕГЭ по математике

Стандартное определение: «Вектор — это направленный отрезок». Обычно этим и ограничиваются знания выпускника о векторах. Кому нужны какие-то «направленные отрезки»?

А в самом деле, что такое векторы и зачем они?

Прогноз погоды. «Ветер северо-западный, скорость 18 метров в секунду». Согласитесь, имеет значение и направление ветра (откуда он дует), и модуль (то есть абсолютная величина) его скорости.

Величины, не имеющие направления, называются скалярными. Масса, работа, электрический заряд никуда не направлены. Они характеризуются лишь числовым значением — «сколько килограмм» или «сколько джоулей».

Физические величины, имеющие не только абсолютное значение, но и направление, называются векторными.

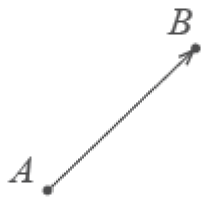
Скорость, сила, ускорение — векторы. Для них важно «сколько» и важно «куда». Например, ускорение свободного падения $\vec{g}$ направлено к поверхности Земли, а величина его равна 9,8 $м/с^2$. Импульс, напряженность электрического поля, индукция магнитного поля — тоже векторные величины.

Вы помните, что физические величины обозначают буквами, латинскими или греческими. Стрелочка над буквой показывает, что величина является векторной:

$\vec{a}$

Вот другой пример.

Автомобиль движется из A в B. Конечный результат — его перемещение из точки A в точку B, то есть перемещение на вектор $\overrightarrow{AB}$.



Теперь понятно, почему вектор — это направленный отрезок. Обратите внимание, конец вектора — там, где стрелочка. **Длиной вектора** называется длина этого отрезка. Обозначается: $|\vec{a}|$ или $|\overrightarrow{AB}|$

До сих пор мы работали со скалярными величинами, по правилам арифметики и элементарной алгебры. Векторы — новое понятие. Это другой класс математических объектов. Для них свои правила.

Когда-то мы и о числах ничего не знали. Знакомство с ними началось в младших классах. Оказалось, что числа можно сравнивать друг с другом, складывать, вычитать, умножать и делить. Мы узнали, что есть число единица и число ноль.

Теперь мы знакомимся с векторами.

Понятия «больше» и «меньше» для векторов не существует — ведь направления их могут быть разными. Сравнивать можно только длины векторов.

А вот понятие равенства для векторов есть.

Равными называются векторы, имеющие одинаковые длины и одинаковое направление. Это значит, что вектор можно перенести параллельно себе в любую точку плоскости.

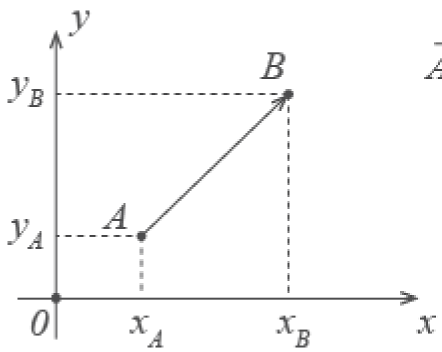
Единичным называется вектор, длина которого равна 1. Нулевым — вектор, длина которого равна нулю, то есть его начало совпадает с концом.

Удобнее всего работать с векторами в прямоугольной системе координат — той самой, в которой рисуем графики функций. Каждой точке в системе координат соответствуют два числа — ее координаты по x и y, абсцисса и ордината.

Вектор также задается двумя координатами: $\vec{a}(x_a, y_a)$

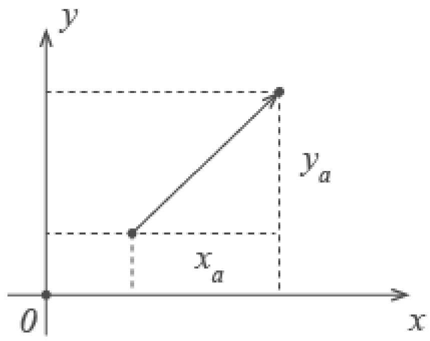
Здесь в скобках записаны координаты вектора $\vec{a}$ - по x и по y.

Находятся они просто: координата конца вектора минус координата его начала.



$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$

Если координаты вектора заданы, его длина находится по формуле



$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$

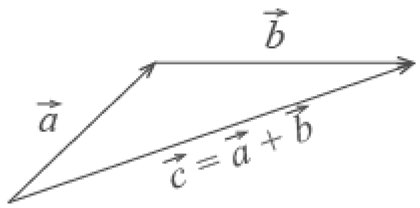
Сложение векторов

Для сложения векторов есть два способа.

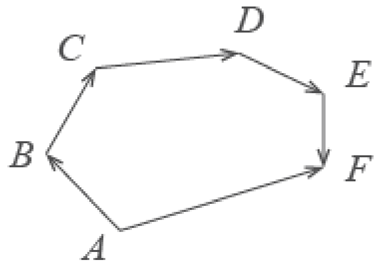
1. Правило параллелограмма. Чтобы сложить векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, помещаем начала обоих в одну точку. Достраиваем до параллелограмма и из той же точки проводим диагональ параллелограмма. Это и будет сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Помните басню про лебедя, рака и щуку? Они очень старались, но так и не сдвинули воз с места. Ведь векторная сумма сил, приложенных ими к возу, была равна нулю.

2. Второй способ сложения векторов — правило треугольника. Возьмем те же векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. К концу первого вектора пристроим начало второго. Теперь соединим начало первого и конец второго. Это и есть сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



По тому же правилу можно сложить и несколько векторов. Пристраиваем их один за другим, а затем соединяем начало первого с концом последнего.



$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$$

Представьте, что вы идете из пункта A в пункт B, из B в C, из C в D, затем в E и в F. Конечный результат этих действий — перемещение из A в F.

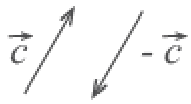
При сложении векторов $\vec{a}(x_a, y_a)$ и $\vec{b}(x_b, y_b)$ получаем:

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

$\vec{c}(x_a + x_b, y_a + y_b)$

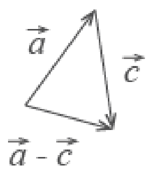
Вычитание векторов

Вектор -$\vec{c}$ направлен противоположно вектору $\vec{c}$. Длины векторов $\vec{c}$ и -$\vec{c}$ равны.



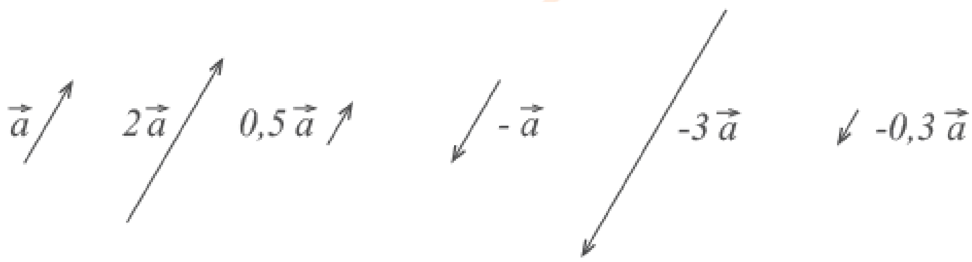
Теперь понятно, что такое вычитание векторов. Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$ – это сумма вектора $\vec{a}$ и вектора -$\vec{c}$.

$\vec{a} - \vec{c} = \vec{a} + (-\vec{c})$



Умножение вектора на число

При умножении вектора $\vec{a}$ на число k получается вектор, длина которого в k раз отличается от длины $\vec{a}$. Он сонаправлен с вектором $\vec{a}$, если k больше нуля, и направлен противоположно $\vec{a}$, если k меньше нуля.



Скалярное произведение векторов

Векторы можно умножать не только на числа, но и друг на друга.

Скалярным произведением векторов называется произведение длин векторов на косинус угла между ними.

Обратите внимание — перемножили два вектора, а получился скаляр, то есть число. Например, в физике механическая работа равна скалярному произведению двух векторов — силы и перемещения:

$$A = \vec{F}\vec{S} = FS\cos\varphi$$

Если векторы перпендикулярны, их скалярное произведение равно нулю.

А вот так скалярное произведение выражается через координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$$

Из формулы для скалярного произведения можно найти угол между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2}}$$

Эта формула особенно удобна в стереометрии. Например, в задаче 14 Профильного ЕГЭ по математике нужно найти угол между скрещивающимися прямыми или между прямой и плоскостью. Часто векторным методом сложная задача по стереометрии решается в несколько раз быстрее, чем классическим.

В школьной программе по математике изучают только скалярное произведение векторов.

Оказывается, кроме скалярного, есть еще и векторное произведение, когда в результате умножения двух векторов получается вектор. Кто сдает ЕГЭ по физике, знает, что такое сила Лоренца и сила Ампера. В формулы для нахождения этих сил входят именно векторные произведения.

Хотите узнать о векторах все? Наведите сматрфон на QR-код и смотрите видеолекцию Анны Малковой.

Векторы — полезнейший математический инструмент. В этом вы убедитесь на первом курсе.

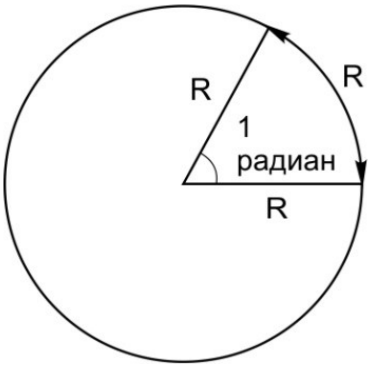
Глава 13. Тригонометрия

В главе 9 мы определили, что такое синус, косинус и тангенс острого угла в прямоугольном треугольнике. Еще, рассматривая внешний угол треугольника, и говорили о синусе, косинусе и тангенсе тупого угла.

Сейчас узнаем об углах много неожиданного. Мы будем говорить об углах положительных и отрицательных. Об углах, больших 180 и даже 360 градусов. Мы введем понятия синуса, косинуса и тангенса для произвольных, то есть для любых углов.

Начнем с систем измерения углов. До сих пор мы измеряли углы только в градусах. Оказывается, можно мерять и по-другому – в **радианах**.

По определению, 1 радиан – это центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу. Вот он, на рисунке.



Как перевести градусы в радианы и наоборот?

Вспомним, что полный круг – это 360 градусов. Длина окружности равна $2\pi r$. Составим пропорцию. Длина окружности так относится к длине дуги AB на нашем рисунке, как 360° - к величине угла, опирающегося на дугу AB, то есть к углу в 1 радиан.

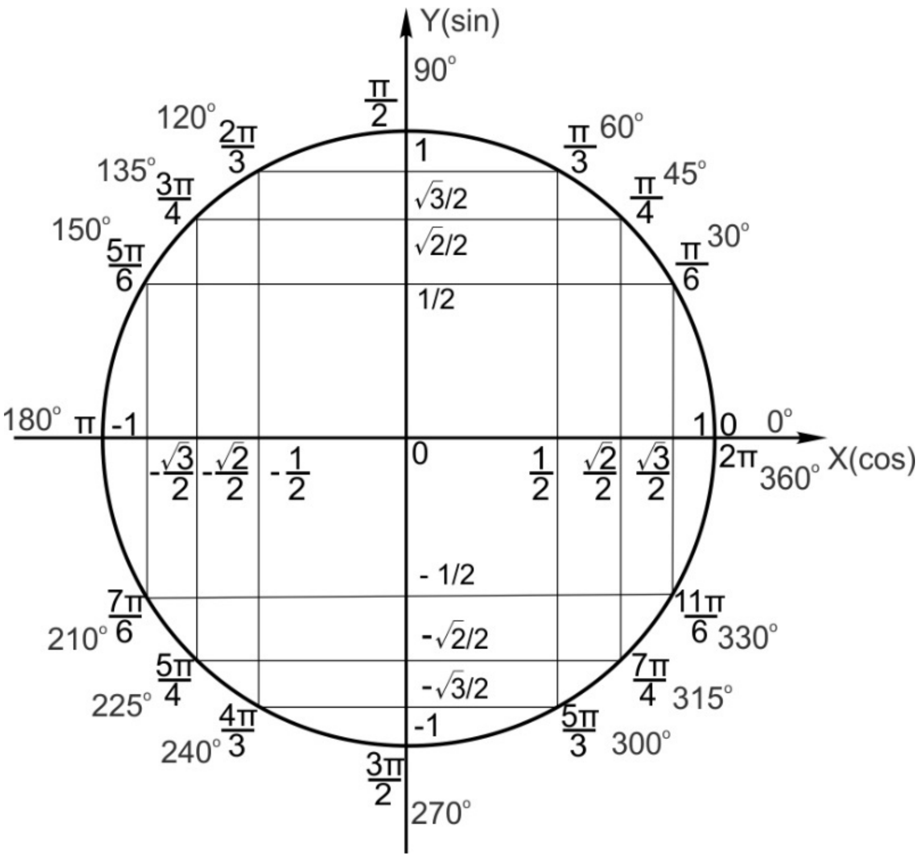
$360° - 2\pi r$

1 радиан – r

Слева в нашей пропорции углы, справа – длина полного круга и длина дуги AB.

Из этой пропорции получаем, что $360° = 2\pi$ радиан. Значит, полный круг – это 2π радиан. Тогда полкруга – это π радиан, четверть круга (то есть 90°) – это $\frac{\pi}{2}$ радиан. Любой угол, выраженный в градусах, можно перевести в радианы. И наоборот, 1 радиан приблизительно равен 57 градусов.

А теперь встречайте - тригонометрический круг, самый простой способ начать осваивать тригонометрию. Он красив, легко запоминается, и на нём есть всё необходимое. Тригонометрический круг заменит вам десяток таблиц.



Нарисуем единичную окружность — то есть окружность с радиусом, равным единице, и с центром в начале системы координат. Той самой системы координат с осями OX и OY, в которой мы привыкли рисовать графики функций.

Договоримся отсчитывать углы от положительного направления оси OX против часовой стрелки.

Мы помним, что полный круг — это 360 градусов.

Тогда точка с координатами (1;0) соответствует углу в 0 градусов. Точка с координатами (-1;0) отвечает углу в $180°$, точка с координатами (0;1) — углу в $90°$. Каждому углу от нуля до 360 градусов соответствует точка на единичной окружности. Обратите внимание, что на нашем тригонометрическом круге углы отмечены и в градусах, и в радианах.

Косинусом угла называется абсцисса (то есть координата по оси OX) точки на единичной окружности, соответствующей данному углу α.

Синусом угла называется ордината (то есть координата по оси OY) точки на единичной окружности, соответствующей данному углу α.

Например:

$\cos 60° = \frac{1}{2}$;

$\cos 0° = 1$;

$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\sin 240° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Всё это легко увидеть на нашем рисунке.

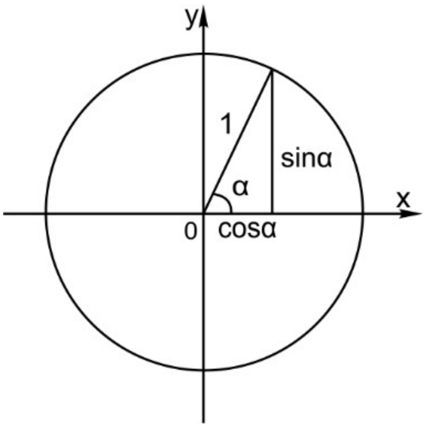
Итак, косинус и синус — координаты точки на единичной окружности, соответствующей данному углу. Косинус — абсцисса (x), синус — ордината (y). Поскольку окружность единичная, для любого угла и синус, и косинус находятся в пределах от -1 до 1:

$-1 \leq \cos\alpha \leq 1,$

$-1 \leq \sin\alpha \leq 1.$

Рассмотрим прямоугольный треугольник на рисунке. Применим к нему теорему Пифагора и получим основное тригонометрическое тождество:

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$



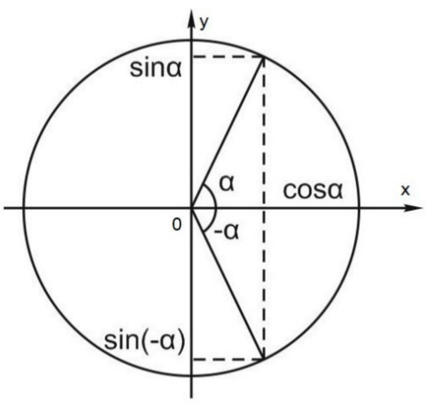
Для того, чтобы узнать знаки синуса и косинуса какого-либо угла, не нужно рисовать отдельных таблиц. Всё уже есть! Находим на нашей окружности точку, соответствующую данному углу α, смотрим, положительны или отрицательны ее координаты по x (это косинус угла α) и по y (это синус угла α).

Если отсчитывать угол от нуля против часовой стрелки — он положительный. Если отсчитывать по часовой стрелке — угол будет отрицательным. Например, угол $-30°$ — это угол величиной в $30°$, который отложили от положительного направления оси x по часовой стрелке.

Легко заметить, что

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha,$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$



Обратите внимание на это ценное свойство.

Углы могут быть и больше 360 градусов. Например, угол $732°$ — это два полных оборота по часовой стрелке и еще $12°$. Поскольку, сделав несколько полных оборотов по окружности, мы вернемся в ту же точку с теми же координатами по x и по y, значения синуса и косинуса повторяются через $360°$. То есть:

$\cos(\alpha + 360° \cdot n) = \cos\alpha,$

$\sin(\alpha + 360° \cdot n) = \sin\alpha,$

где n — целое число. То же самое можно записать в радианах:

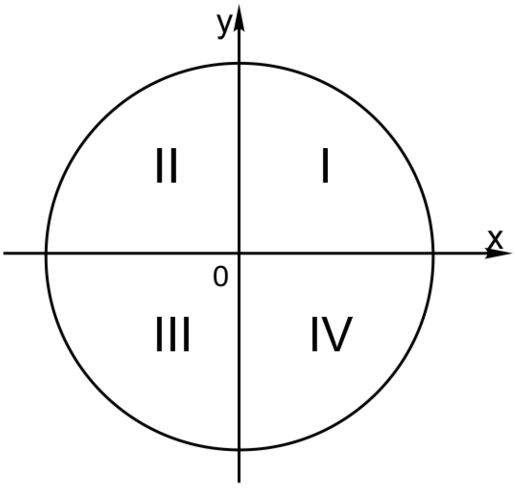
$\cos(\alpha + 2\pi n) = \cos\alpha,$

$\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin\alpha.$

Мы только что записали еще одно ценное свойство синуса и косинуса – периодичность. Это значит, что синус и косинус все свои значения повторяют через целое число кругов. Например, вам надо вычислить $\sin 945°$. Поскольку $945 = 360 \cdot 2 + 225$,

$\sin 945° = \sin(360° \cdot 2 + 225°) = \sin 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Мы просто отбросили два полных круга, а потом на тригонометрическом круге посмотрели, чему равен $\sin\ 225°$. Иногда вам будут встречаться выражения: угол из первой четверти, из третьей четверти. Вот эти четверти, на рисунке.



Мы ничего не говорили о тангенсе и котангенсе. Можно на том же тригонометрическом круге изобразить еще и оси тангенсов и котангенсов, но тогда рисунок станет сложнее. Проще для каждого угла посчитать значение тангенса, разделив его синус на косинус. Мы ведь помним, что

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$

В результате получим следующую таблицу.

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$tg\ \varphi$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не существует	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$ctg\ \varphi$	не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	не существует

Еще раз посмотрим на тригонометрический круг. Вот сколько всего мы видим на этом рисунке:

1. Перевод градусов в радианы и наоборот. Полный круг содержит 360 градусов, или 2π радиан.

2. Значения синусов и косинусов основных углов. Помним, что значение косинуса угла мы находим на оси X, а значение синуса — на оси Y.

3. И синус, и косинус принимают значения от -1 до 1.

4. Значение тангенса угла α тоже легко найти — поделив $sin\,\alpha$ на $cos\,\alpha$. А чтобы найти котангенс — наоборот, косинус делим на синус.

5. Знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

6. Косинус – функция четная, синус – нечетная. Наверняка на уроках вы слышали эти слова. Вот что они означают:

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$$

7. Тригонометрический круг помогает нам увидеть, что синус и косинус — функции периодические. Это значит, что все их значения повторяются через полный круг или целое число кругов. Другими словами, их период равен $360°$, то есть 2π.

Формулы тригонометрии

Из-за чего происходит досадная потеря баллов на ЕГЭ по математике? Из-за невнимательности и вычислительных ошибок. Из-за плохого почерка, в котором эксперт не смог разобраться. А еще из-за того, что лень было выучить формулы.

Тригонометрические формулы необходимы даже для решения задач базового уровня.

Как правило, школьники помнят основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

А про остальные формулы говорят: «Зачем их учить, у меня шпаргалка в телефоне есть!»

Забудьте об этом. Во-первых, использование на ЕГЭ шпаргалок и мобильных телефонов ведет к удалению с экзамена. Во-вторых, большинство сборников формул в мобильниках, которые мы видели, содержат дикие ошибки.

А в третьих. . . Представьте, что вы в незнакомой стране и вам надо объясниться с ее жителями, по возможности быстро. И вы знаете только одно слово, зато у вас с собой мобильник (который нельзя доставать), а в нем словарь (который содержит ошибки). В таком же положении оказывается и школьник, у которого в активном запасе одна формула, а все остальное где-то там, в шпаргалке, и всё это в волнительной обстановке экзамена!

Итак, одной формулы мало. Зато справочники по математике содержат больше ста тригонометрических формул. Неужели их все надо выучить?

Нет, конечно. Необходимых формул не так уж и много. Все они здесь.

Формулы тригонометрии

Основное тригонометрическое тождество	
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	$tg^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $\quad tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $1 + ctg^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ $\quad ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$
Двойные углы	**Синус суммы, косинус разности…**
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$ $tg2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$	$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ $tg(\alpha\pm\beta) = \dfrac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha\, tg\beta}$
Сумма синусов, разность косинусов…	**Преобразование произведения в сумму**
$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$	$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$ $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$ $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$
Универсальная тригонометрическая замена	**Формулы понижения степени**
Пусть $t = tg\dfrac{\alpha}{2}$. Тогда $\sin\alpha = \dfrac{2t}{1+t^2}$ $\cos\alpha = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ $tg\alpha = \dfrac{2t}{1-t^2}$	$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$ $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$
Тройные углы	
$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ $\quad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$	

В этой таблице формулы специально собраны по группам. Самая верхняя – основное тригонометрическое тождество и формулы, которые из него получаются. А также формулы для тангенса и котангенса.

Вторая группа – формулы для синуса, косинуса и тангенса двойного угла. Обратите внимание, что для косинуса двойного угла есть целых три формулы.

Следующая группа – формулы для синусов, косинусов и тангенсов суммы или разности двух аргументов.

И две группы формул внизу таблицы – для тех, кто решился сдавать ЕГЭ на профильном уровне. Там они незаменимы.

Как выучить тригонометрические формулы?

Так же, как любые другие: понемногу, но часто.

Не рассказывайте себе сказки о том, что в последнюю ночь перед ЕГЭ все выучите. Каждый день – один блок, то есть три-четыре формулы из нашей таблицы.

Выучить иностранный язык проще всего тому, кто вынужден постоянно на нем говорить. Так и здесь. Решив 20-50 заданий на преобразование тригонометрических выражений и доказательство тождеств, вы точно запомните нужные формулы.

И универсальный способ: ежедневно, садясь за уроки, берите чистый листок и выписывайте наизусть все тригонометрические формулы, какие помните. Когда всё готово — сверяете. И к экзамену вы будете помнить всё.

Формулы приведения.

Обратите внимание, что в нашей таблице с формулами нет формул приведения. Шпаргалки для них не нужны. Формулы приведения не надо зубрить наизусть. Достаточно запомнить два основных принципа, по которым они строятся. Очень хорошо, если вы посмотрите мой видеоурок «Формулы приведения». Здесь лучше один раз увидеть, чем 100 раз прочитать.

Формулы приведения применяются, если вам надо преобразовать выражение вида $\sin(x+\pi)$, $\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$, $\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$. Одним словом, когда к аргументу (то есть к величине, зависящей от переменной) прибавляется целое число, умноженное на π, или нечетное число, умноженное на $\frac{\pi}{2}$.

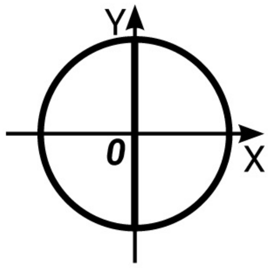
А приведение – потому, что мы будем приводить это сложное выражение в скобках к более простому – к углу из первой четверти, то есть от нуля до 90°.

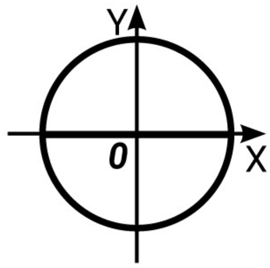
Формулы приведения разделяются на две группы. Одни – те, в которых к аргументу прибавляется нечетное число, умноженное на $\frac{\pi}{2}$ – как в выражении $\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ или $\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$.

Другие – те, в которых к аргументу прибавляется целое число, умноженное на π. Как в выражениях $\sin(x+\pi)$, $\sin(\pi-x)$, $\cos(x-3\pi)$, $\operatorname{tg}(5x+\pi)$.

Формулы приведения

Помогают **привести** тригонометрические выражения к более простым.

<table>
<tr><th colspan="2">Первая часть правила</th></tr>
<tr><td>К аргументу прибавляется (вычитается) нечетное число, умноженное на $\frac{\pi}{2}$
Это формулы вида
$\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), tg\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
Прибавляем (вычитаем) $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ – в общем, то, что лежит на вертикальной оси.</td><td>К аргументу прибавляется целое число, умноженное на π.
Это формулы вида
$\sin(x + \pi), \ \cos(\pi - x)$
Прибавляем (вычитаем) π, 3π, 5π – в общем,то, что лежит на горизонтальной оси.</td></tr>
<tr><td>

Вертикально киваем головой: ДА, меняется функция на кофункцию. Синус поменяется на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс и наоборот.</td><td>

Горизонтально мотаем головой: НЕТ, не меняется функция на кофункцию</td></tr>
<tr><th colspan="2">Вторая часть правила</th></tr>
<tr><td colspan="2">Знак получившегося выражения такой же, каким будет знак тригонометрической функции в левой его части, при условии, что аргумент мы берем из первой четверти.
ПРИМЕР Упростим выражение $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.
Поскольку $\frac{\pi}{2}$ лежит на вертикальной оси, функция меняется на кофункцию (на синус).
Взяв x из первой четверти и прибавив к нему $\frac{\pi}{2}$, попадем во вторую четверть. Во второй четверти косинус отрицателен. Значит, получится $-\sin x$.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Еще примеры:</th></tr>
<tr><td>$\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin x$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
$tg\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -ctg x$</td><td>$\sin(x + \pi) = -\sin x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\sin(\pi - x) = \sin x$</td></tr>
</table>

Запишем, кстати, чему равны эти выражения.

Первая группа. К аргументу прибавляем нечетное число, умноженное на $\frac{\pi}{2}$.

$$\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=\sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$$

$$\cos(x+\frac{\pi}{2})=-\sin x$$

$$\operatorname{tg}(2x-\tfrac{\pi}{2})=-\operatorname{ctg}2x.$$

Заметим, что теперь справа в формуле более простое выражение. И синус меняется на косинус, косинус – на синус, тангенс – на котангенс. Говорят, что здесь тригонометрическая функция меняется на **ко**функцию, то есть на парную к ней функцию. И еще что-то происходит со знаком – в одних случаях он меняется, в других нет.

Теперь вторая группа формул.

$$\sin(x+\pi)=-\sin x$$

$$\sin(\pi-x)=\sin x$$

$$\cos(x-3\pi)=-\cos x$$

$$\operatorname{tg}(5x+\pi)=\operatorname{tg}5x.$$

В этом случае функция не меняется на кофункцию.

Итак, если в тригонометрической формуле к аргументу мы прибавляем или вычитаем $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$ – в общем, угол, лежащий на вертикальной оси, - функция меняется на кофункцию.

Если прибавляем или вычитаем π, 3π, 5π – в общем, то, что лежит на горизонтальной оси, - функция на кофункцию не меняется.

То есть если прибавляемый угол лежит на вертикальной оси – вертикально киваем головой, говорим: «Да, да, меняется функция на кофункцию». Если прибавляемый угол лежит на горизонтальной оси – горизонтально мотаем головой, говорим: «Нет, нет, не меняется функция на кофункцию».

Хорошо, мы выяснили, когда меняется функция на кофункцию в тригонометрических формулах, а когда – нет. Осталось выяснить, что происходит со знаком. Когда в правой части формулы он такой же, как в левой, а когда – нет?

Как это проверить – покажу на примере. Возьмем формулу $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. Если я возьму x из первой четверти, прибавлю к нему $\frac{\pi}{2}$ – попаду во вторую четверть. Во второй четверти косинус отрицателен. Значит, получится - $\sin x$.

Другой пример: выражение $\sin(\pi - x)$. Я возьму x из первой четверти, тогда угол $\pi - x$ будет во второй четверти, а там синус положителен. Значит, $\sin(\pi - x) = \sin x$. Кстати, мы уже познакомились с этой формулой раньше, в теме «Внешний угол треугольника».

И теперь несколько задач ЕГЭ на применение всех известных нам формул и свойств тригонометрических функций.

1. $4\sqrt{2} \cdot \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{7\pi}{3} = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$

Мы нашли значение $\cos\frac{\pi}{4}$ с помощью тригонометрического круга. И еще воспользовались тем, что период косинуса равен 2π, и поэтому $\cos\frac{7\pi}{3} = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

2. $\dfrac{5\,\mathrm{tg}\,163°}{\mathrm{tg}\,17°} = \dfrac{5\,\mathrm{tg}(180° - 17°)}{\mathrm{tg}\,17°} = -\dfrac{5\,\mathrm{tg}\,17°}{\mathrm{tg}\,17°} = -5$

Воспользовались формулой приведения. 180° - находится на горизонтальной оси, значит, не меняется функция на кофункцию (горизонтально мотаем головой, помните?), а знак у тангенса во второй четверти отрицательный – появляется минус.

3. $\dfrac{14\sin 409°}{\sin 49°} = \dfrac{14\sin(360° + 49°)}{\sin 49°} = \dfrac{14\sin 49°}{\sin 49°} = 14$

Здесь мы вспомнили о том, что синус – функция периодическая, и тогда $\sin(360° + \alpha) = \sin\alpha$.

4. $5\mathrm{tg}\,17° \cdot \mathrm{tg}\,107° = 5\mathrm{tg}\,17° \cdot \mathrm{tg}\,(90° + 17°) = -5\mathrm{tg}\,17° \cdot \mathrm{ctg}\,17° = -5$

Тоже формула приведения. Угол 90° лежит на вертикальной оси. Вертикально киваем головой: да, меняется функция на кофункцию, то есть тангенс поменялся на котангенс. А минус – потому, что $\mathrm{tg}\,107° < 0$. Далее пользуемся тем, что $\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$ и получаем ответ.

5. $\dfrac{12}{\sin^2 37° + \sin^2 127°} = \dfrac{12}{\sin^2 37° + \sin^2(90° + 37°)} = \dfrac{12}{\sin^2 37° + \cos^2 37°} = 12$

Снова формула приведения и основное тригонометрическое тождество:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

6. $\dfrac{12\sin 11° \cdot \cos 11°}{\sin 22°} = \dfrac{12\sin 11° \cdot \cos 11°}{2\sin 11° \cdot \cos 11°} = 6$

Применили формулу синуса двойного угла: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

7. $\dfrac{24(\sin^2 17° - \cos^2 17°)}{\cos 34°} = -\dfrac{24(\cos^2 17° - \sin^2 17°)}{\cos 34°} = -\dfrac{24(\cos 34°)}{\cos 34°} = -24$

Применили формулу косинуса двойного угла: $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

8. $\dfrac{5\cos 29°}{\sin 61°} = \dfrac{5\cos(90° - 61°)}{\sin 61°} = \dfrac{5\sin 61°}{\sin 61°} = 5$

Снова формула приведения.

Обратите внимание - в нашем Справочнике для подготовки к ЕГЭ по математике есть удобная таблица для запоминания формул приведения.

Но если и она вам не поможет – попробуйте еще один прием. Применим формулы синуса суммы или разности, косинуса суммы или разности. Например:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cos\frac{\pi}{2} + \cos x \sin\frac{\pi}{2} = \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x\,;$$

$$\cos(\pi - x) = \cos\pi\cos x + \sin\pi\sin x = -\cos x + 0 \cdot \sin x = -\cos x\,;$$

$$\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = \sin x \cos\frac{3\pi}{2} - \cos x \sin\frac{3\pi}{2} = \sin x \cdot 0 - \cos x \cdot (-1) = \cos x\,;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x - \sin\frac{\pi}{2}\sin x = 0 \cdot \cos x - 1 \cdot sin\,x = -\sin x.$$

Вот так в математике одни и те же задачи можно решать разными способам.

ЕГЭ-СТУДИЯ

ЕГЭ-СТУДИЯ

Глава 14. Элементарные функции и их графики

Понятие **функции** – одно из основных в математике.

На уроках математики вы часто слышите это слово. Вы строите графики функций, занимаетесь исследованием функции, находите наибольшее или наименьшее значение функции. Но для понимания всех этих действий давайте определим, что такое функция.

Определение функции можно дать несколькими способами. Все они будут дополнять друг друга.

1. Функция – это **зависимость одной переменной величины от другой**. Другими словами, **взаимосвязь** между величинами. Любой физический закон, любая формула отражает такую взаимосвязь величин. Например, формула $p = \rho g h$ – это зависимость давления жидкости p от глубины h.

Чем больше глубина, тем больше давление жидкости. Можно сказать, что давление жидкости является функцией от глубины, на которой его измеряют.

Знакомое вам обозначение $y = f(x)$ как раз и выражает идею такой зависимости одной величины от другой. Величина y зависит от величины x по определенному закону, или правилу, обозначаемому f.

Другими словами: меняем x (независимую переменную, или **аргумент**) – и по определенному правилу меняется y.

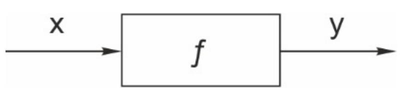
Совсем необязательно обозначать переменные x и y. Например, $L(t) = L_0(1 + \alpha t)$ – зависимость длины L от температуры t, то есть закон теплового расширения. Сама запись $L(t)$ означает, что величина L зависит от t.

2. Можно дать и другое определение.

Функция – это определенное **действие** над переменной.

Это означает, что мы берем величину x, делаем с ней определенное действие (например, возводим в квадрат или вычисляем ее логарифм) – и получаем величину y.

В технической литературе встречается определение функции как устройства, на вход которого подается x – а на выходе получается y.



Итак, функция – это действие над переменной. В этом значении слово «функция» применяется и в областях, далеких от математики. Например, можно говорить о функциях мобильного телефона, о функциях головного мозга или функциях депутата. Во всех этих случаях речь идет именно о совершаемых действиях.

3. Дадим еще одно определение функции – то, что чаще всего встречается в учебниках.

Функция – это соответствие между двумя множествами, причем каждому элементу первого множества соответствует один и только один элемент второго множества.

Например, функция $y = 2x$ каждому действительному числу x ставит в соответствие число в два раза большее, чем x.

Повторим еще раз: каждому элементу множества X по определенному правилу мы ставим в соответствие элемент множества Y. Множество X называется **областью определения функции**. Множество Y – **областью значений**.

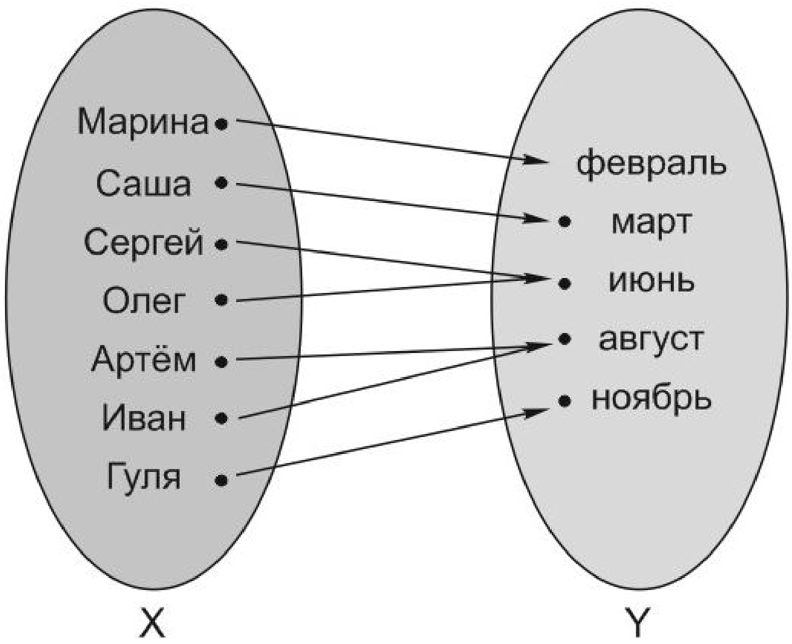
Но зачем здесь такое длинное уточнение: «каждому элементу первого множества соответствует один и только один элемент второго»? Оказывается, что соответствия между множествами тоже бывают разные.

Рассмотрим в качестве примера соответствие между двумя множествами – гражданами России, у которых есть паспорта, и номерами их паспортов. Ясно, что это соответствие взаимно-однозначное – у каждого гражданина только один российский паспорт. И наоборот – по номеру паспорта можно найти человека.

В математике тоже есть такие взаимно-однозначные функции. Например, линейная функция $y = 3x + 2$. Каждому значению x соответствует одно и только одно значение y. И наоборот – зная y, можно однозначно найти x.

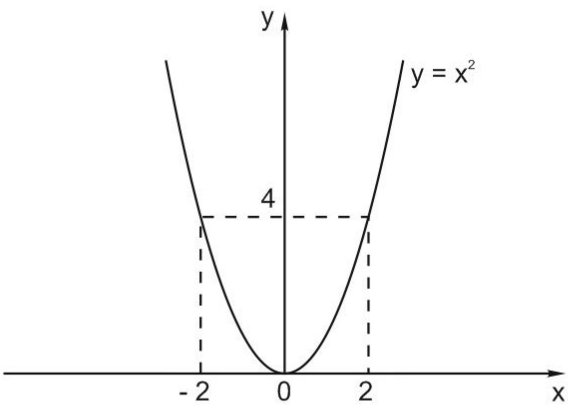
x	-3	-2	-1	0	1	2
$y = 3x + 2$	-7	-4	-1	2	5	8

Могут быть и другие типы соответствий между множествами. Возьмем для примера компанию друзей и месяцы, в которые они родились:

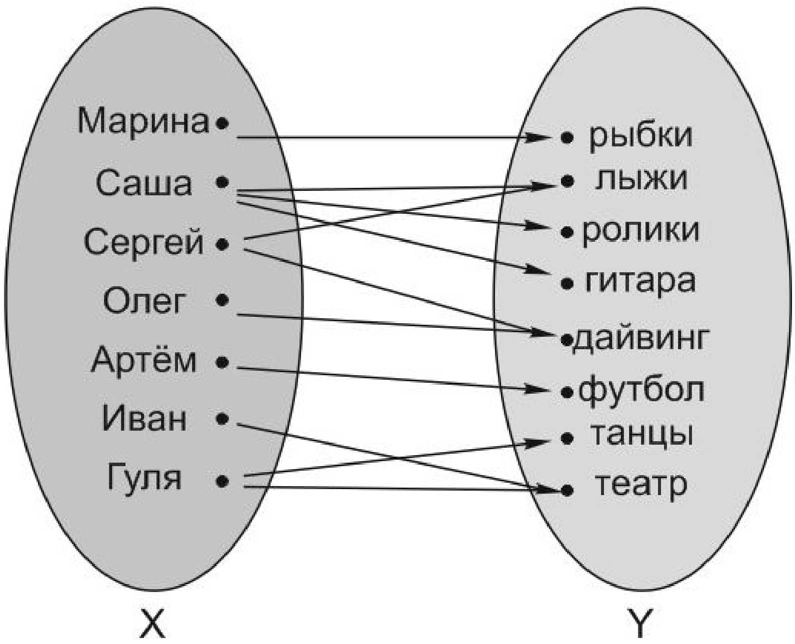


Каждый человек родился в какой-то определенный месяц. Но данное соответствие не является взаимно-однозначным. Например, в июне родились Сергей и Олег.

Пример такого соответствия в математике – функция $y = x^2$. Один и тот же элемент второго множества $y = 4$ соответствует двум разным элементам первого множества: $x = 2$ и $x = -2$.



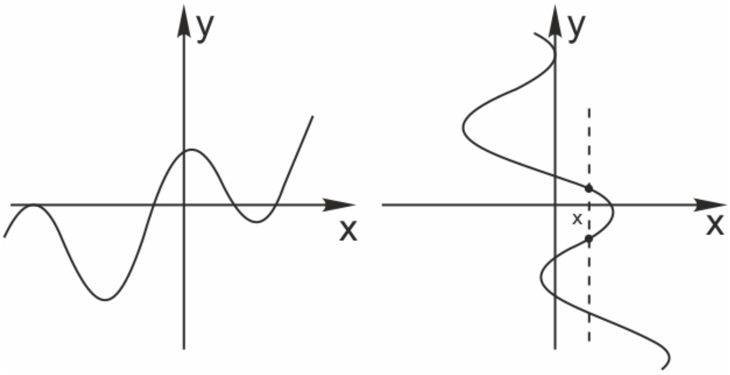
А каким должно быть соответствие между двумя множествами, чтобы оно не являлось функцией? Очень просто! Возьмем ту же компанию друзей и их хобби:



Мы видим, что в первом множестве есть элементы, которым соответствует два или три элемента из второго множества.

Очень сложно было бы описать такое соответствие математически, не правда ли?

Вот другой пример. На рисунках изображены кривые. Как вы думаете, какая из них является графиком функции, а какая – нет?



Ответ очевиден. Первая кривая – это график некоторой функции, а вторая – нет. Ведь на ней есть точки, где каждому значению x соответствует не одно, а целых три значения y.

Перечислим *способы задания функции*.

1. С помощью формулы. Это удобный и привычный для нас способ. Например:

$y = \cos x$,

$y = x^3 - 2x^2$,

$z = f(t)$,

$L(t) = L_0(1 + \alpha t)$.

Это примеры функций, заданных формулами.

2. Графический способ. Он является самым наглядным. На графике сразу видно все – возрастание и убывание функции, наибольшие и наименьшие значения, точки максимума и минимума. Дальше я расскажу об исследовании функции с помощью графика.

К тому же не всегда легко вывести точную формулу функции. Например, курс доллара (то есть зависимость стоимости доллара от времени) можно показать только на графике.

3. С помощью таблицы. В школе с этого способа вы когда-то начинали изучение темы «Функция» — строили таблицу и только после этого – график. А при экспериментальном исследовании какой-либо новой закономерности, когда еще неизвестны ни формула, ни график, этот способ будет единственно возможным.

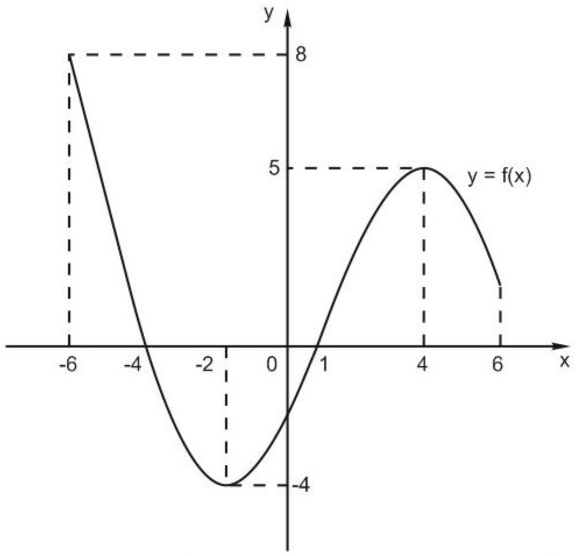
4. С помощью описания. Бывает, что на разных участках функция задается разными формулами. Известная вам функция модуль, то есть $y = |x|$, задается описанием:

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

Исследование графика функции

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Посмотрим, как исследовать функцию с помощью графика. Оказывается, глядя на график, можно узнать всё, что нас интересует, а именно:

- область определения функции
- область значений функции
- нули функции
- промежутки возрастания и убывания
- точки максимума и минимума
- наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.



Уточним терминологию:

Абсцисса — это координата точки по горизонтали.

Ордината — координата по вертикали.

Ось абсцисс — горизонтальная ось, чаще всего называется ось X.

Ось ординат — вертикальная ось, или ось Y.

Аргумент — независимая переменная, от которой зависят значения функции. Чаще всего обозначается x.

Другими словами, мы сами выбираем x, подставляем в формулу функции и получаем y. *Область определения* функции — множество тех (и только тех) значений аргумента x, при которых функция существует.

Обозначается: $D(f)$ или $D(y)$.

На нашем рисунке область определения функции $y = f(x)$ — это отрезок [-6;6]. Именно на этом отрезке нарисован график функции. Только здесь данная функция существует.

Область значений функции — это множество значений, которые принимает переменная y. На нашем рисунке это отрезок [-3;7] — от самого нижнего до самого верхнего значения y.

Нули функции — точки, где значение функции равно нулю, то есть $y = 0$. На нашем рисунке это точки $x = -4$ и $x = 1$.

Значения функции положительны там, где $y > 0$. На нашем рисунке это промежутки $[-6; -4]$ и $[1; 6]$.

Значения функции отрицательны там, где $y < 0$. У нас это промежуток (или интервал) от -4 до 1.

Важнейшие понятия — *возрастание и убывание функции* на некотором множестве M. В качестве множества M можно взять отрезок $[a; b]$, интервал $(a; b)$, объединение промежутков или всю числовую прямую.

Функция $y = f(x)$ *возрастает* на множестве M, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству M, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

Иными словами, чем больше x, тем больше y, то есть график идет вправо и вверх.

Функция $y = f(x)$ *убывает* на множестве M, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству M, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$. Для убывающей функции большему значению x соответствует меньшее значение y. График идет вправо и вниз.

На нашем рисунке функция $f(x)$ возрастает на промежутке [-2; 4] и убывает на промежутках [-6; -2] и [4; 6].

Определим, что такое *точки максимума и минимума функции*.

Точка максимума — это внутренняя точка области определения, такая, что значение функции в ней больше, чем во всех достаточно близких к ней точках.

Другими словами, точка максимума — такая точка, значение функции в которой *больше*, чем в соседних. Это локальный «холмик» на графике.

На нашем рисунке $x = 4$ — точка максимума.

Точка минимума — внутренняя точка области определения, такая, что значение функции в ней меньше, чем во всех достаточно близких к ней точках.

То есть точка минимума — такая, что значение функции в ней меньше, чем в соседних. На графике это локальная «ямка».

На нашем рисунке $x = -2$ — точка минимума.

Точка $x = -6$ — граничная. Она не является внутренней точкой области определения и потому не подходит под определение точки максимума. Ведь у нее нет соседей слева. Точно так же и $x = 6$ на нашем графике не может быть точкой минимума.

Точки максимума и минимума вместе называются *точками экстремума функции*. В нашем случае это $x = 4$ и $x = -2$.

А что делать, если нужно найти, например, *минимум функции* $y = f(x)$ на отрезке [-4;0]? В данном случае ответ: $y = -3$. Потому что *минимум функции* — это ее значение в точке минимума.

Аналогично, максимум нашей функции равен 4. Он достигается в точке $x = 4$.

Можно сказать, что экстремумы функции равны 4 и -3.

Иногда в задачах требуется найти *наибольшее и наименьшее значения* функции на заданном отрезке. Они не обязательно совпадают с экстремумами.

В нашем случае *наименьшее значение функции* на отрезке [-6; 6] равно -3 и совпадает с минимумом функции. А вот наибольшее ее значение на этом отрезке равно 7. Оно достигается в левом конце отрезка.

В любом случае наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции на отрезке достигаются либо в точках экстремума, либо на концах отрезка.

Даже в первой части ЕГЭ по математике есть задачи на понимание определения функции.

1. Найдите $\frac{g(5-x)}{g(5+x)}$, *если* $g(x) = \sqrt[9]{x(10-x)}$, *при* $|x| \neq 5$.

Что такое $g(x)$? Это функция, каждому числу x ставящая в соответствие число $\sqrt[9]{x \cdot (10-x)}$. Например, $g(0) = 0$;

$g(1) = \sqrt[9]{1 \cdot (10-1)} = \sqrt[9]{9}$,

Тогда $g(5-x) = \sqrt[9]{(5-x)(10-5+x)} = \sqrt[9]{(5-x)(5+x)}$,

$g(5+x) = \sqrt[9]{(5+x)(10-5-x)} = \sqrt[9]{(5+x)(5-x)}$

Заметим, что

$g(5-x) = g(5+x)$. Значит, при $|x| \neq 5$

$$\frac{g(5-x)}{g(5+x)} = 1.$$

2. Найдите $\frac{p(b)}{p(\frac{1}{b})}$, *если* $p(b) = \left(b - \frac{9}{b}\right)\left(-9b + \frac{1}{b}\right)$, *при* $b \neq 0$.

$p(b) = \left(b - \frac{9}{b}\right)\left(-9b + \frac{1}{b}\right)$ – функция, каждому числу b ставящая в соответствии число $\left(b - \frac{9}{b}\right)\left(-9b + \frac{1}{b}\right)$. Тогда при $b \neq 0$ $p\left(\frac{1}{b}\right) = \left(\frac{1}{b} - 9b\right)\left(-\frac{9}{b} + b\right) = \left(b - \frac{9}{b}\right)\left(-9b + \frac{1}{b}\right) = p(b)$, и значение выражения $\frac{p(b)}{p(\frac{1}{b})}$ равно 1.

Пять типов элементарных функций и их графики

Существует всего 5 типов элементарных функций. Это степенные, показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические функции. Их графики и свойства надо знать наизусть. Любая функция, которую вы можете встретить в задачах ЕГЭ, относится к одному из пяти типов – или является их комбинацией.

1. **Степенные.**

Функции вида $y = x^{\alpha}$. К этому типу относятся линейные, квадратичные, кубические, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, $\sqrt[n]{x}$. С ними вы хорошо знакомы.

2. **Показательные.**

Это функции вида $y = a^x$.

3. **Логарифмические** $y = log_a x$.

4. **Тригонометрические.**

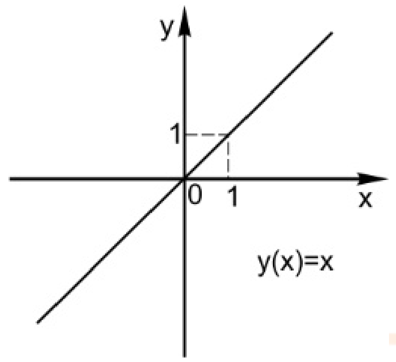
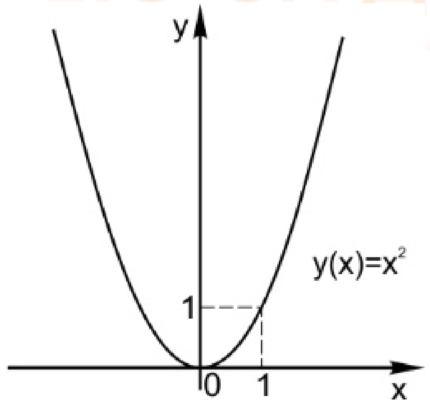
В их формулах присутствуют синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы.

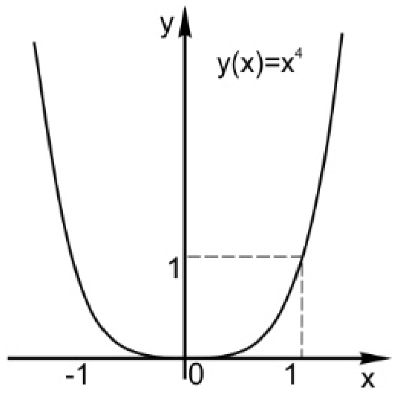
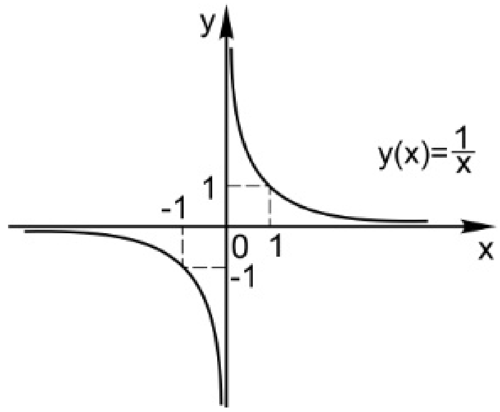
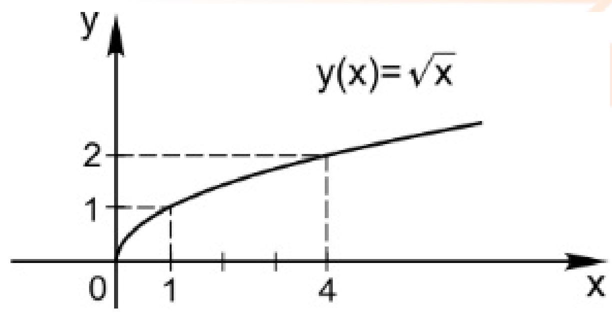
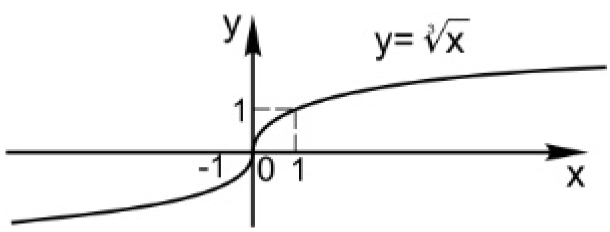
5. **Обратные тригонометрические.**

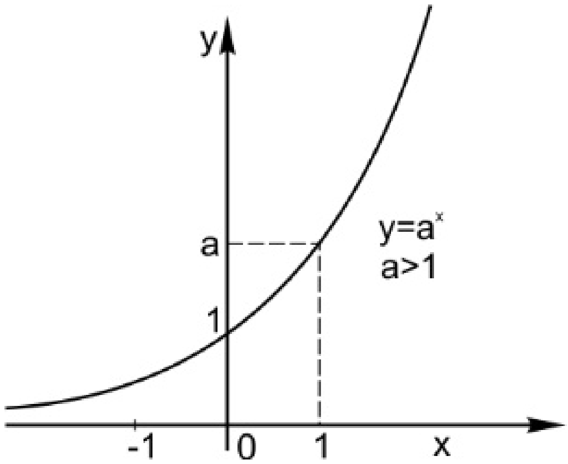
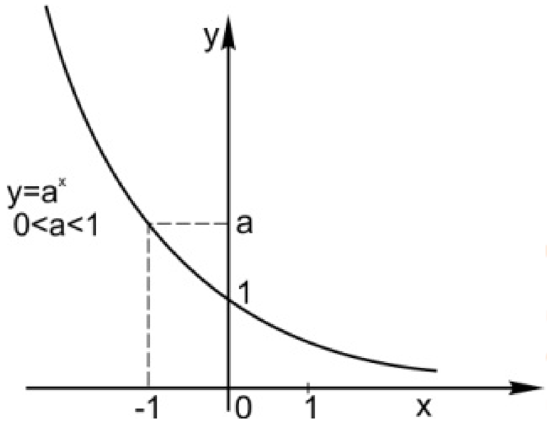
Содержат arcsin*x*, arccos*x*, arctg*x*, arcctg*x*.

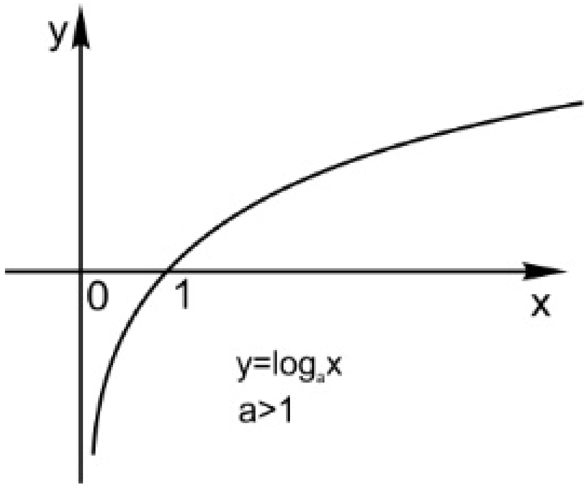
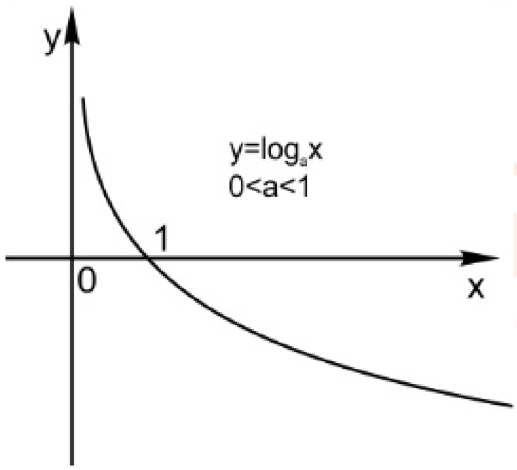
Элементарными все они называются потому, что из них, как из элементов, получаются все остальные, встречающиеся в школьном курсе. Например, $y = x^2\, e^x$ — произведение квадратичной и показательной функций; $y = \sin(a^x)$ — сложная функция, то есть комбинация двух функций — показательной и тригонометрической.

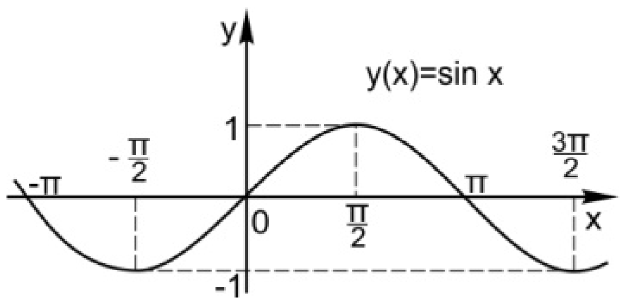
Соберем в одной таблице графики основных элементарных функций.

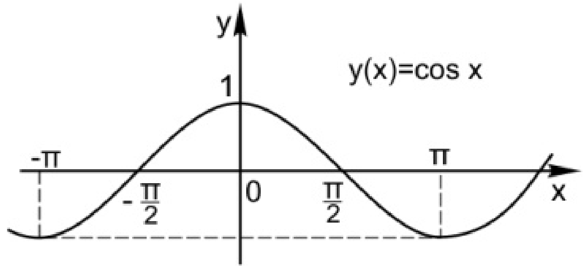
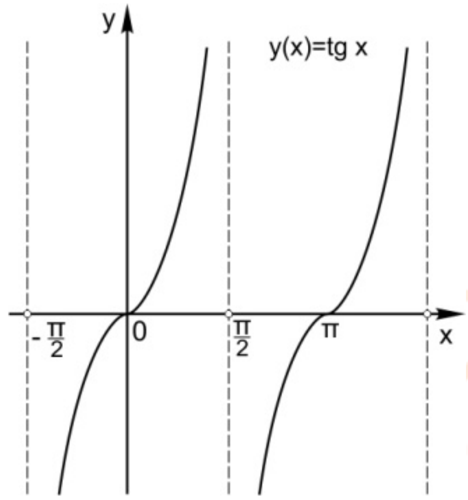
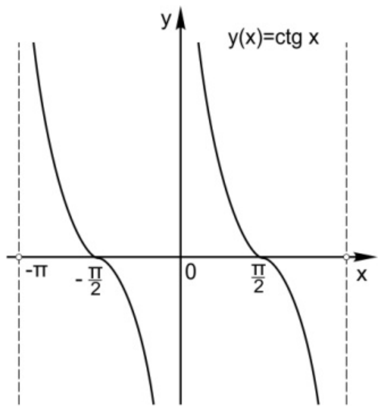
Степенные функции	
1. Линейная функция $y = kx + b$. Пример: $y = x$ Прямые, имеющие одинаковые угловые коэффициенты, параллельны. Прямые, для угловых коэффициентов которых выполняется равенство $k_1 k_2 = -1$ – перпендикулярны.	
2. Квадратичная парабола $y = ax^2 + bx + c$. Если a>0 – ветви вверх, Если a<0 – ветви вниз. Абсцисса вершины параболы: $x_0 = -\frac{b}{2a}$ Точки пересечения с осью x: x_1 и x_2, являющиеся корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$; Ордината точки пересечения параболы с осью равна c. Пример: $y = x^2$	

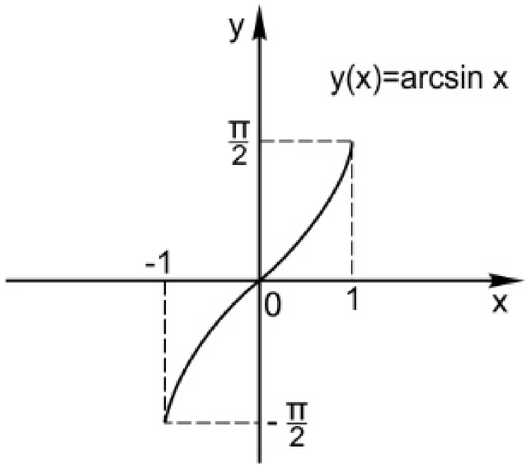
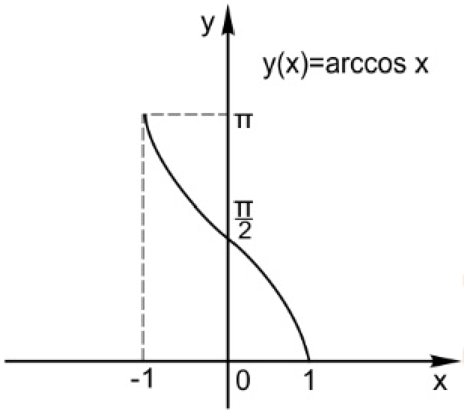
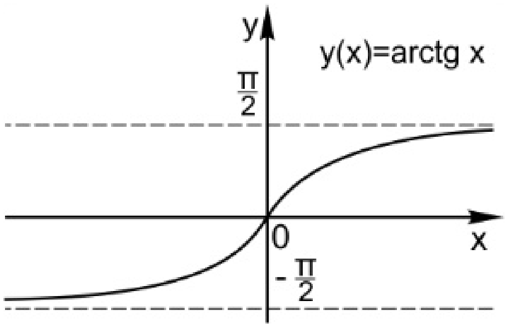
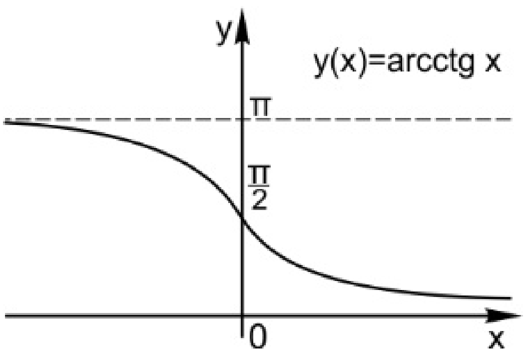
3. Функция $y = x^n$, n – натуральное, n – четное, $n = 2, 4, 6, \ldots$ Функция в этом случае четная.	
4. Гипербола $y = \frac{k}{x}$ Пример: $y = \frac{1}{x}$	
5. $y = \sqrt{x}$	
6. $y = \sqrt[3]{x}$	

Показательная функция	
$y = a^x$ $a > 1$	
$y = a^x$ $0 < a < 1$	

Логарифмическая функция	
$y = \log_a x$ $a > 1$	
$y = \log_a x$ $0 < a < 1$	

Тригонометрические функции	
$y = \sin x$	

$y = \cos x$	
$y = \mathrm{tg}\, x$	
$y = \mathrm{ctg}\, x$	

Обратные тригонометрические функции	
$y = \arcsin x$	
$y = \arccos x$	
$y = \text{arctg}\, x$	
$y = \text{arcctg}\, x$	

В нашей справочной таблице даны простые примеры функций каждого типа. А как будет выглядеть график функции $y = 3\cos 2x$ или $|log_2 x\ |$? Мы научимся строить и такие!

Язык функций и графиков понятен не только математику, но и биологу, экономисту, медику и конечно, физику. Это универсальный язык науки и техники.

Преобразование графиков функций

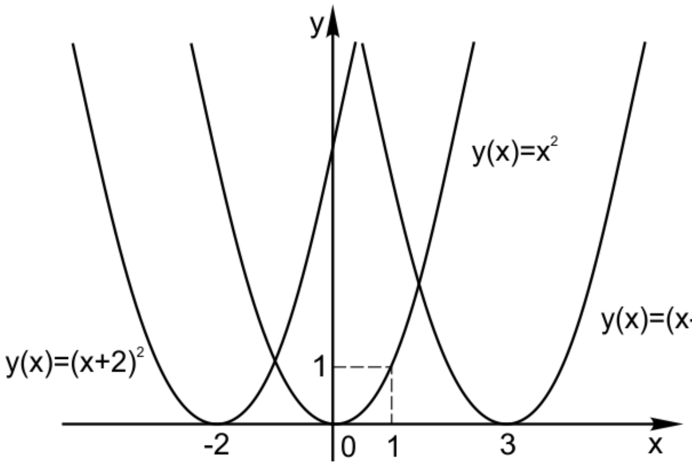
Вы умеете работать в графическом редакторе на компьютере?

Изображение можно сдвинуть (по горизонтали или вертикали). Растянуть (по горизонтали или вертикали). Отразить. И все это мы будем делать с графиками функций.

Очень жаль, что эта тема - полезная и очень интересная – выпадает из школьной программы. На нее не постоянно хватает времени. Из-за этого многим старшеклассникам не даются задачи с параметрами – которые на самом деле похожи на конструктор, где вы собираете решение из знакомых элементов. Хотя бы для того, чтобы решать задачи с параметрами, стоит научиться строить графики функций. И мы сделаем это!

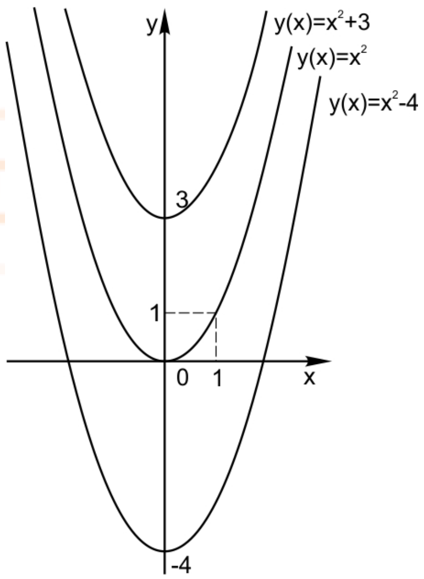
1. Сдвиг по горизонтали

Пусть функция задана формулой $y = f(x)$ и $a > 0$. Тогда график функции $y = f(x - a)$ сдвинут относительно исходной на a вправо. График функции $y = f(x + a)$ сдвинут относительно исходной на a влево.



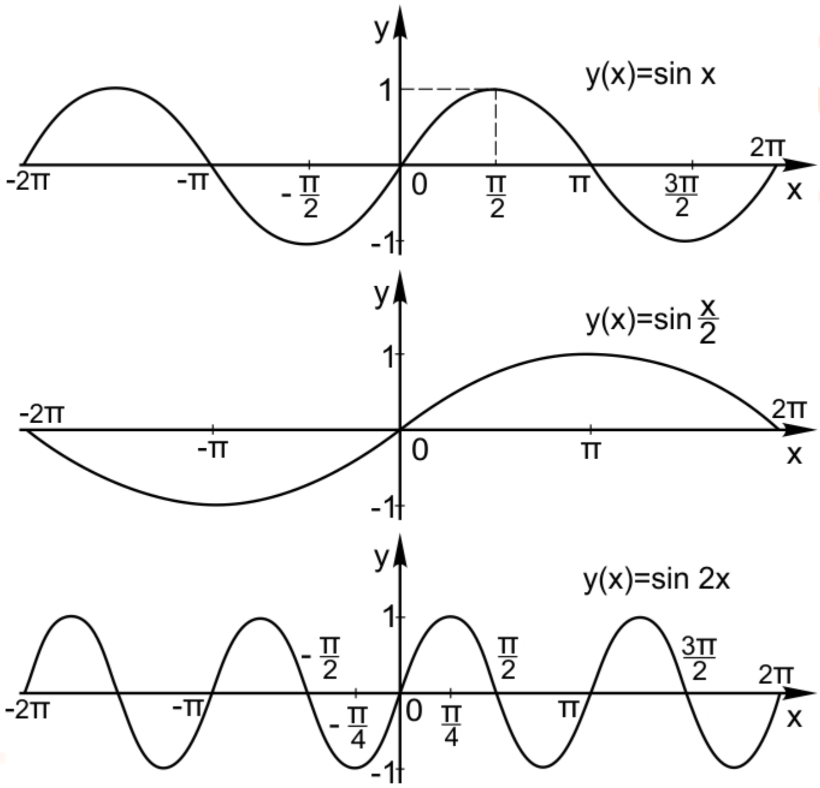
2. Сдвиг по вертикали

Пусть функция задана формулой $y = f(x)$ и С – некоторое положительное число. Тогда график функции $y = f(x)\ +$ С сдвинут относительно исходного на С вверх. График функции $y = f(x)$ – С сдвинут относительно исходного на С вниз.



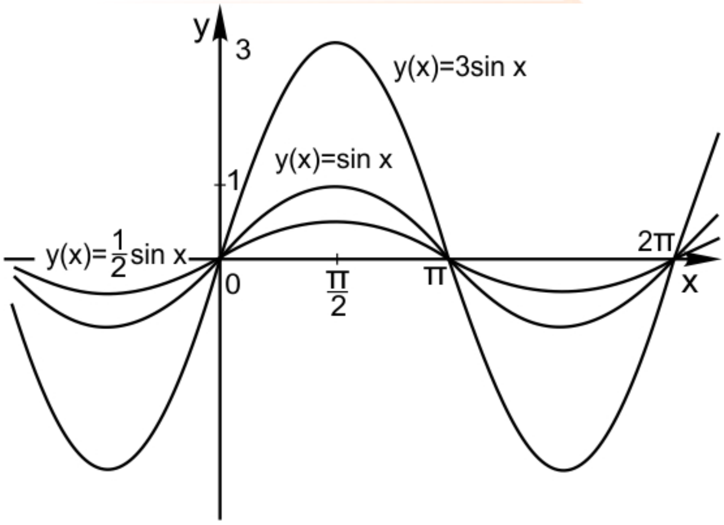
3. Растяжение (сжатие) по горизонтали

Пусть функция задана формулой $y = f(x)$ и $k > 0$. Тогда график функции $y = f(kx)$ растянут относительно исходного в k раз по горизонтали, если $0 < k < 1$, и сжат относительно исходного в k раз по горизонтали, если $k > 1$.



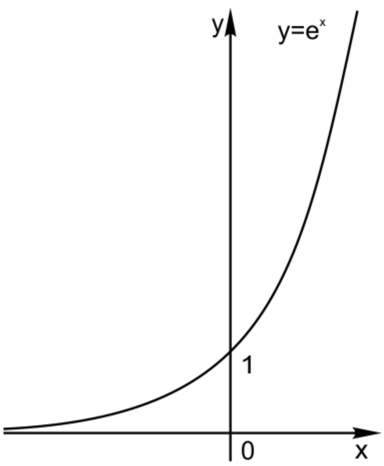
4. Растяжение (сжатие) по вертикали

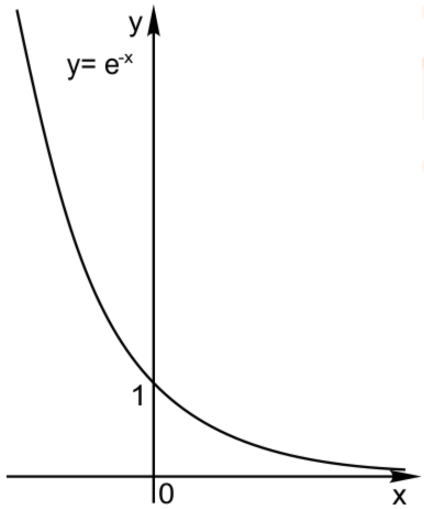
Пусть функция задана формулой $y = f(x)$ и $M > 0$. Тогда график функции $y = M \cdot f(x)$ растянут относительно исходного в М раз по вертикали, если $M > 1$, и сжат относительно исходного в М раз по вертикали, если $0 < M < 1$.



5. Отражение по горизонтали

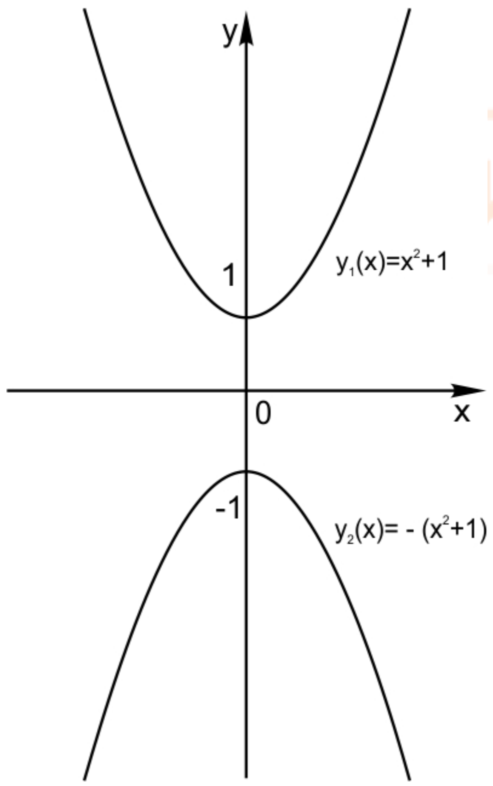
График функции $y = f(-x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси Y.



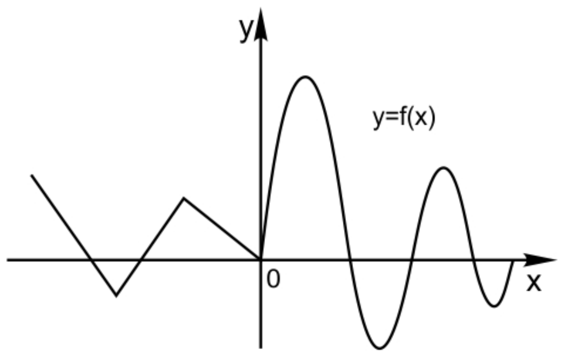


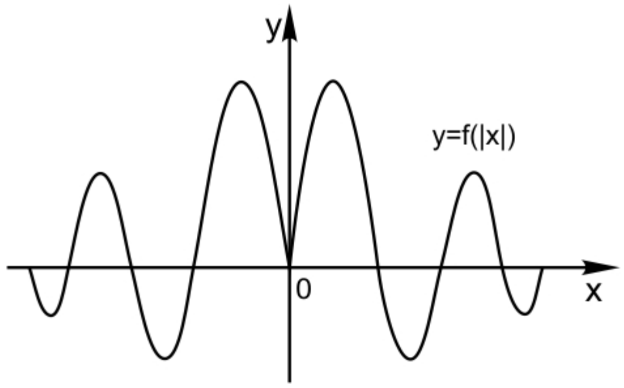
6. Отражение по вертикали

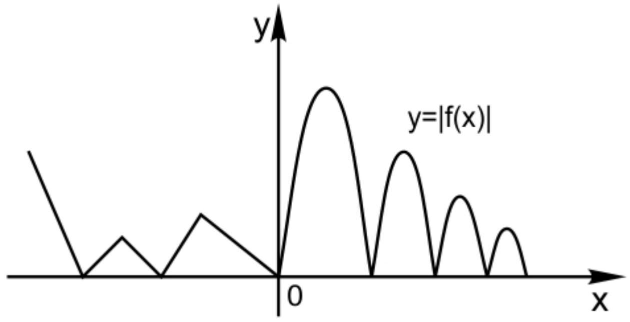
График функции $y = -f(x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси X.



7. Графики функций y= f(|x|) и y=|f(x)|



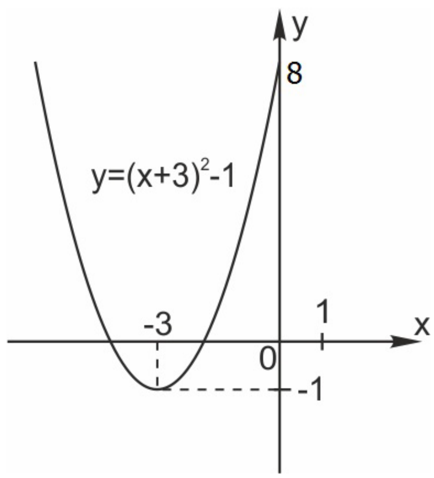




1. Построим график функции $y = (x+3)^2 - 1$

Это квадратичная парабола, сдвинутая на 3 влево по x и на 1 вниз по y.

Вершина в точке (-3; -1).



2. Построим график функции

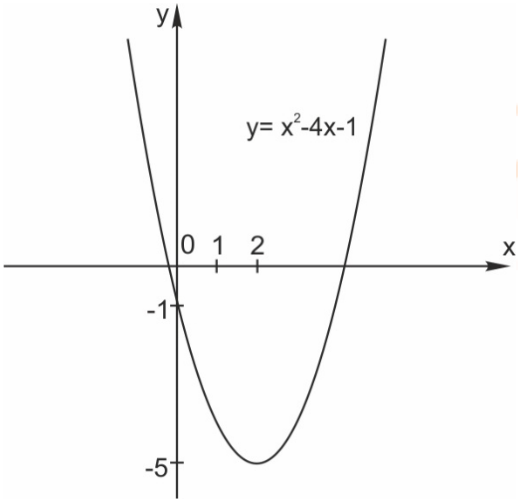
$y = x^2 - 4x - 1$

Выделим полный квадрат в формуле.

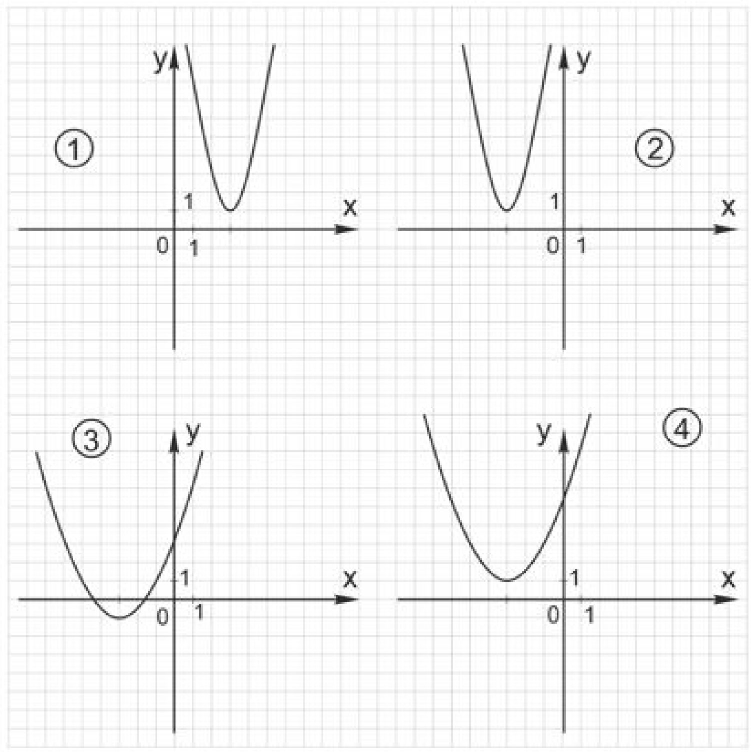
$y = x^2 - 4x + 4 - 4 - 1 = x^2 - 4x + 4 - 5 = (x-2)^2 - 5$

График - квадратичная парабола, сдвинутая на 2 вправо по x и на 5 вниз по y.

Обратите внимание: график функции $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось y в точке (0; c). На нашем графике это точка (0; -1).



3.



а) На каком из рисунков изображен график функции $y = 2(x+3)^2 + 1$*? В ответ запишите номер рисунка.*

Решение: Вершина параболы – в точке с координатами (-3; 1). Парабола растянута в 2 раза по оси ординат. Это рисунок 2.

Ответ: 2

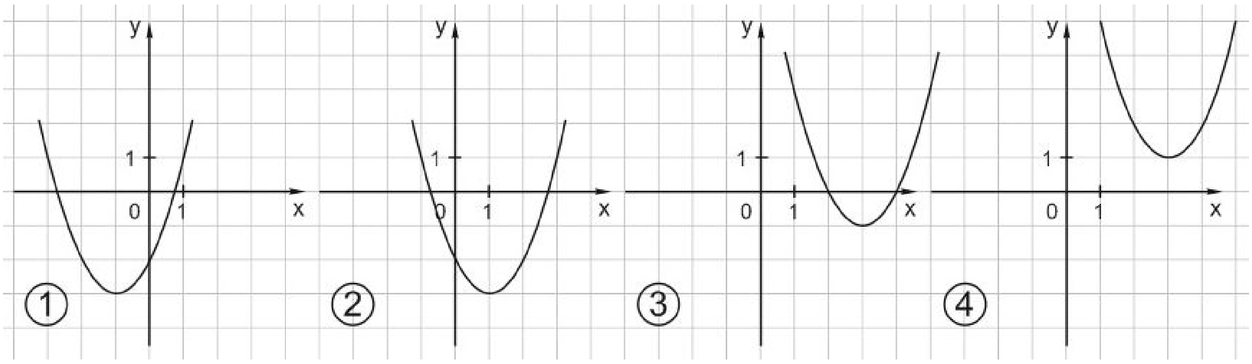
б) На одном из рисунков изображен график функции $y = 0{,}5\ (x+3)^2 - 1$. *На каком? В ответ запишите номер рисунка.*

Решение:

Вершина параболы – в точке с координатами (-3; - 1). Парабола сжата в 2 раза по оси ординат. Это рисунок 3.

Ответ: 3

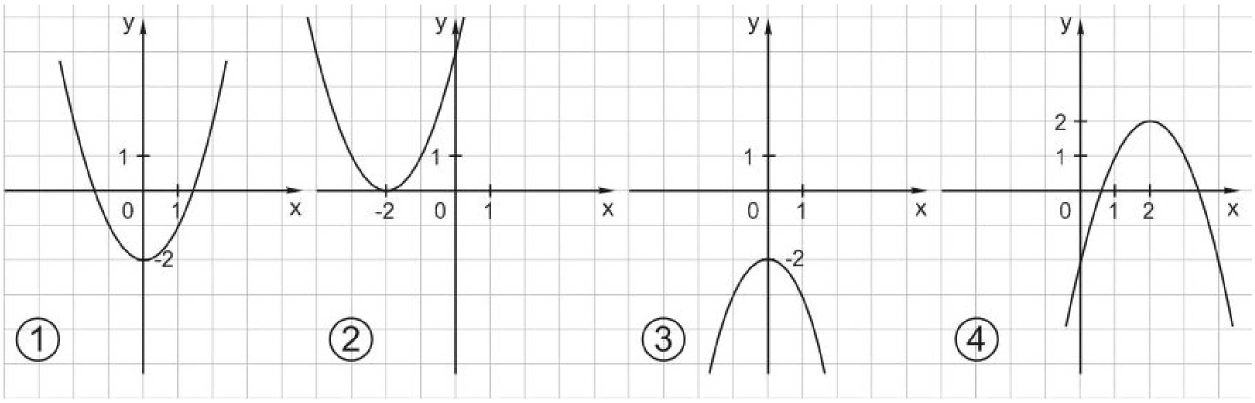
4. На каком из чертежей изображен график функции $y = (x-3)^2 + 1$ *?*



Решение: Формула $y = (x-3)^2 + 1$ задает параболу с ветвями вверх, с вершиной в точке (3; 1). Это рисунок 4.

Ответ: 4

5. На каком рисунке изображен график функции $y = -x^2 - 2$ *?*

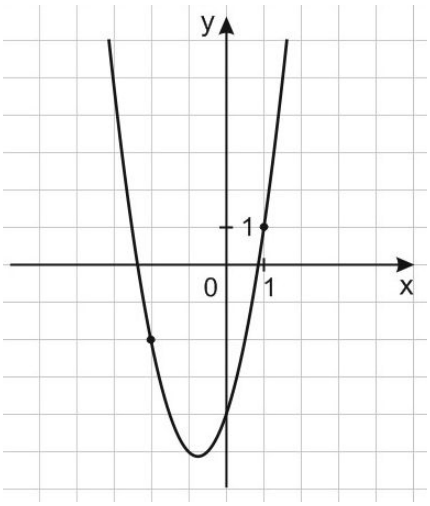


Решение:

Формула $y = -x^2 - 2$ задает параболу с ветвями вниз, полученную с помощью сдвига параболы $y = -x^2$ на 2 единицы вниз вдоль оси Оу. Такая парабола изображена на рисунке 3.

Ответ: 3

6. На рисунке изображён график функции $f(x) = 2x^2 + bx + c$. *Найдите* $f(-5)$.



Решение:

График функции $y = 2x^2 + bx + c$ проходит через точки с координатами (1; 1) и (-2; -2). Подставляя координаты этих точек в формулу функции, получим:

$$\begin{cases} 2 + b + c = 1 \\ 2 \cdot 4 - 2b + c = -2 \end{cases}$$

$\begin{cases} b + c = -1 \\ -2b + c = -10 \end{cases}$; отсюда $b = 3$, $c = -4$.

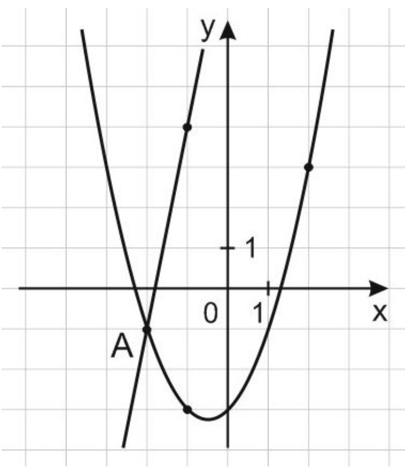
Формула функции имеет вид:

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 4;$$

$$f(-5) = 2 \cdot 25 - 3 \cdot 5 - 4 = 31$$

Ответ: 31.

7. *На рисунке изображены графики функций $f(x) = 5x + 9$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.*



Решение:

Найдем a, b и c в формуле функции $g(x) = ax^2 + bx + c$. График этой функции пересекает ось ординат в точке (0; -3), поэтому $c = -3$.

График функции $g(x)$ проходит через точки $(-1; -3)$ и (2; 3). Подставим по очереди координаты этих точек в формулу функции:

$\begin{cases} a - b - 3 = -3 \\ 4a + 2b - 3 = 3 \end{cases}$; отсюда $a = b = 1$;

$$g(x) = x^2 + x - 3;$$

Найдем абсциссу точки B. Для точек A и B: $f(x) = g(x)$

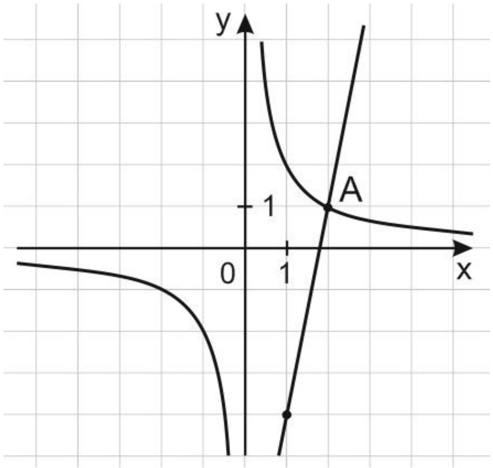
$$5x + 9 = x^2 + x - 3;$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0;$$

$x = -2$ (это абсцисса точки A) или $x = 6$ (это абсцисса точки B).

Ответ: 6.

8. *На рисунке изображены графики функций* $f(x) = \frac{k}{x}$ *и* $g(x) = ax + b$*, которые пересекаются в точках А и В. Найдите абсциссу точки В.*



Решение:

График функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку (2; 1); значит, $\frac{k}{2} = 1$; $k = 2$, $f(x) = \frac{2}{x}$.

График функции $g(x) = ax + b$ проходит через точки (2; 1) и (1; -4), $a = 5$ – угловой коэффициент прямой; (находим как тангенс угла наклона прямой и положительному направлению оси X); тогда $5 \cdot 2 + b = 1$; $b = -9$.

Для точек А и В имеем: $f(x) = g(x)$;

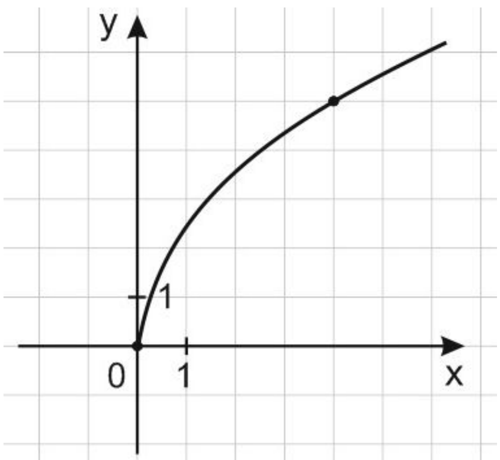
$$\frac{2}{x} = 5x - 9;$$

$$5x^2 - 9x - 2 = 0;$$

Отсюда $x = 2$ (абсцисса точки А) или $x = -0{,}2$ (абсцисса точки В).

Ответ: -0,2.

9. *На рисунке изображён график функции* $f(x) = k\sqrt{x}$*. Найдите f (6,76).*



Решение:

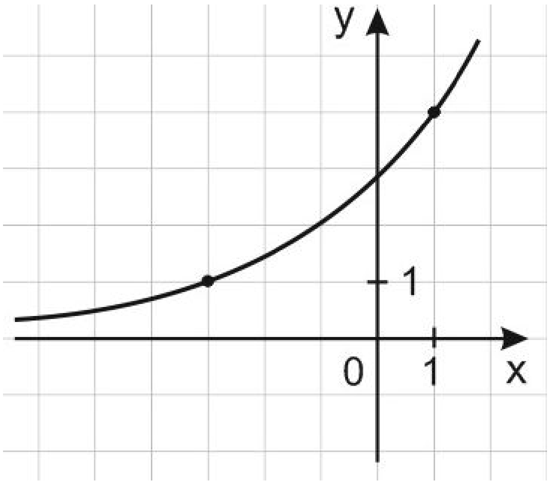
Функция задана формулой:

$y = k\sqrt{x}$. Ее график проходит через точку (4; 5); значит, $k \cdot \sqrt{4} = 5$; $k = 2{,}5$;

$f(x) = 2{,}5\sqrt{x}$. Тогда $f(6{,}76) = 2{,}5 \cdot \sqrt{6{,}76} = 2{,}5 \cdot 2{,}6 = 6{,}5$.

Ответ: 6,5.

10. На рисунке изображён график функции $f(x) = a^{x+b}$. *Найдите* $f(-7)$.



Решение:

График функции проходит через точки (-3; 1) и (1; 4). Подставив по очереди координаты этих точек в формулу функции $f(x) = a^{x+b}$, получим:

$$\begin{cases} a^{-3+b} = 1 \\ a^{1+b} = 4 \end{cases};$$

Поделим второе уравнение на первое:

$a^{1+b+3-b} = 4$; $a^4 = 4$; $a = \sqrt{2}$.

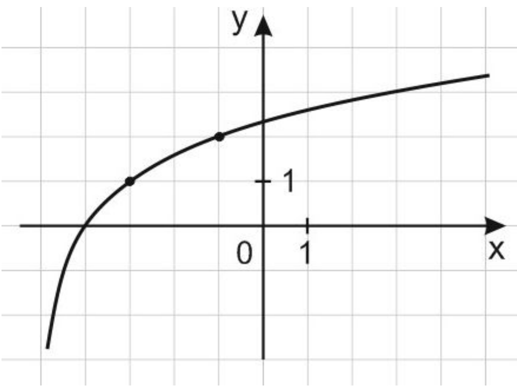
Подставим во второе уравнение:

$\sqrt{2}^{1+b} = 4$; $2^{\frac{1+b}{2}} = 2^2$; $1 + b = 4$; $b = 3$.

$f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^{x+3}$; $f(-7) = \left(\sqrt{2}\right)^{-7+3} = \left(\sqrt{2}\right)^{-4} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

Ответ: 0,25.

11. На рисунке изображён график функции $f(x) = log_a(x + b)$. *Найдите* $f(11)$.



Решение:

График функции $y = \log_a(x+b)$ проходит через точки (-3; 1) и (-1; 2). Подставим по очереди эти точки в формулу функции.

$$\begin{cases} \log_a(-3+b) = 1 \\ \log_a(-1+b) = 2 \end{cases}$$

Отсюда: $\begin{cases} b-3 = a \\ b-1 = a^2 \end{cases}$;

Вычтем из второго уравнения первое:

$a^2 - a = 2;\ \ a^2 - a - 2 = 0;$

$a = 2$ или $a = -1$ – не подходит, так как $a > 0$ (как основание логарифма).

Тогда $b = a + 3 = 5$; $f(x) = \log_2(x+5)$;

$$f(11) = \log_2 16 = 4.$$

Ответ: 4.

Наше знакомство с этой темой только начинается. Ведь для того, чтобы решать задачи с параметрами, надо уметь строить графики не только элементарных, но и сложных функций, владеть преобразованиями графиков, уметь применять в задачах свойства функций – четность и нечетность, непрерывность, монотонность.

Все это мы изучаем на Онлайн-курсе подготовки на 100 баллов. Сначала – задачи на построение графиков, затем простые, подготовительные задачи с параметрами, и наконец, «боевые» задачи ЕГЭ, которые оцениваются в 4 первичных балла.

Я рекомендую свой Онлайн-курс всем, кто хочет освоить сложные задачи – «параметры», планиметрию, стереометрию и задачи на числа и их свойства. Например, на Онлайн-курсе я даю целых 12 методов решения задач с параметрами. Это помогает моим выпускникам набрать высокие баллы на ЕГЭ, а также подготовиться к изучению математического анализа на первых курсах вуза.

Глава 15. Производная функции

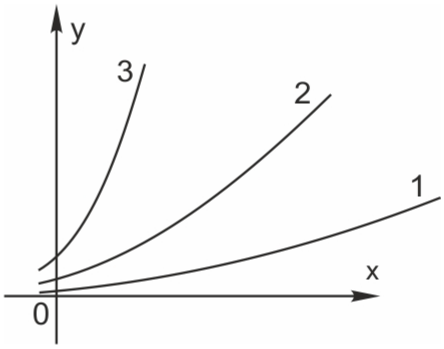
Производная функции — одна из самых сложных тем в школьной программе. Сейчас я просто и понятно расскажу о том, что такое производная и для чего она нужна. Я не буду пока стремиться к математической строгости изложения. Самое главное — понять смысл.

А для тех, кто лучше воспринимает видео, чем печатный текст, моя видеолекция «Производная функции»

Запомним определение:

Производная — это скорость изменения функции.

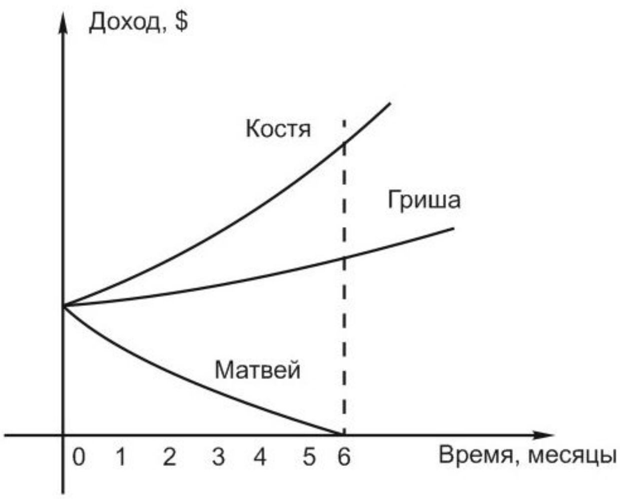
На рисунке — графики трех функций. Как вы думаете, какая из них быстрее растет?



Ответ очевиден — третья. У нее самая большая скорость изменения, то есть самая большая производная.

Вот другой пример.

Костя, Гриша и Матвей одновременно устроились на работу. Посмотрим, как менялся их доход в течение года:



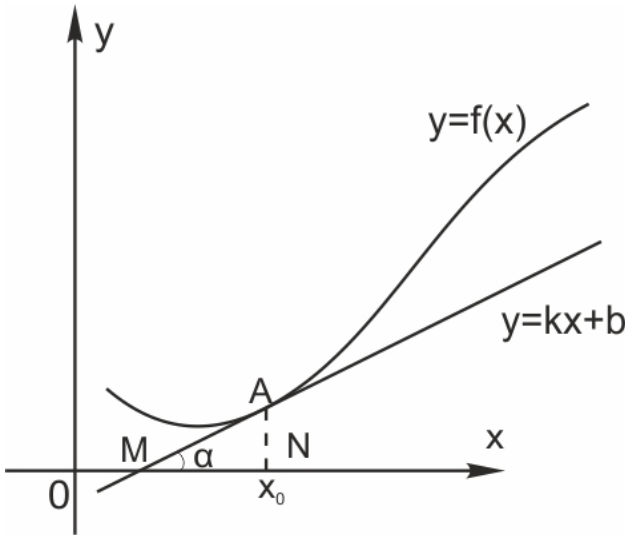
На графике сразу все видно, не правда ли? Доход Кости за полгода вырос больше чем в два раза. И у Гриши доход тоже вырос, но совсем чуть-чуть. А доход Матвея уменьшился до нуля. Стартовые условия одинаковые, а скорость изменения функции, то есть *производная*, — разная. Что касается Матвея — у его дохода производная вообще отрицательна.

Интуитивно мы без труда оцениваем скорость изменения функции. Но как же это делаем?

На самом деле мы смотрим, насколько круто идет вверх (или вниз) график функции. Другими словами — насколько быстро меняется y с изменением x. Очевидно, что одна и та же функция в разных точках может иметь разное значение производной — то есть может меняться быстрее или медленнее.

Производная функции обозначается $f'(x)$.

Покажем, как найти $f'(x)$ с помощью графика.



Нарисован график некоторой функции $y = f(x)$. Возьмем на нем точку A с абсциссой x_0. Проведём в этой точке касательную к графику функции. Мы хотим оценить, насколько круто вверх идет график функции. Удобная величина для этого — *тангенс угла наклона касательной*.

Производная функции $f(x)$ в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной, проведённой к графику функции в этой точке.

$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$

Обратите внимание — в качестве угла наклона касательной мы берем угол между касательной и положительным направлением оси OX.

Иногда учащиеся спрашивают, что такое касательная к графику функции. Это прямая, имеющая на данном участке единственную общую точку с графиком.

Найдем $k = \operatorname{tg} \alpha$. Мы помним, что тангенс острого угла в прямоугольном треугольнике равен отношению противолежащего катета к прилежащему. Из треугольника AMN:

$$f'(x_0) = tg\alpha = \frac{AN}{MN}$$

Мы нашли производную с помощью графика, даже не зная формулу функции. Такие задачи часто встречаются в ЕГЭ по математике под номером B_8.

Есть и другое важное соотношение. Вспомним, что прямая задается уравнением

$y = kx + b.$

Величина k в этом уравнении называется *угловым коэффициентом прямой*. Она равна тангенсу угла наклона прямой к оси X.

$\mathrm{k} = \mathrm{tg}\,\alpha.$

Мы получаем, что

$f'(x_0) = \mathrm{tg}\,\alpha = k$

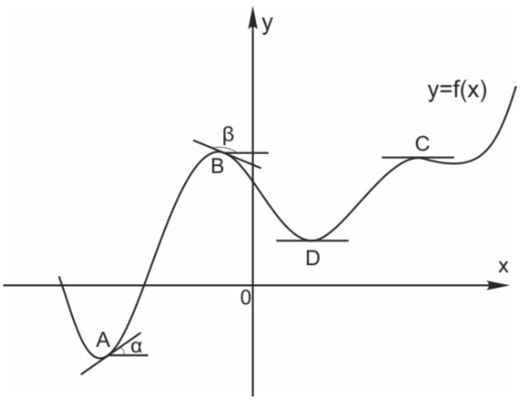
Запомним эту формулу. Она выражает геометрический смысл производной.

Производная функции в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в этой точке.

Другими словами, производная равна тангенсу угла наклона касательной.

Мы уже сказали, что у одной и той же функции в разных точках может быть разная производная. Посмотрим, как же связана производная с поведением функции.

Нарисуем график некоторой функции $y = f(x_0)$. Пусть на одних участках эта функция возрастает, на других — убывает, причем с разной скоростью. И пусть у этой функции будут точки максимума и минимума.



В точке A функция $f(x_0)$ возрастает. Касательная к графику, проведенная в точке A, образует острый угол α с положительным направлением оси X. Значит, в точке A производная положительна.

В точке B наша функция убывает. Касательная в этой точке образует тупой угол β с положительным направлением оси X. Поскольку тангенс тупого угла отрицателен, в точке B производная отрицательна.

Вот что получается:

Если функция $y = f(x)$ возрастает, ее производная положительна.

Если $f(x)$ убывает, ее производная отрицательна.

А что же будет в точках максимума и минимума? Мы видим, что в точках С (точка максимума) и D (точка минимума) касательная горизонтальна. Следовательно, тангенс угла наклона касательной в этих точках равен нулю, и производная тоже равна нулю.

Точка С — точка максимума. В этой точке возрастание функции сменяется убыванием. Следовательно, знак производной меняется в точке С с «плюса» на «минус».

В точке D — точке минимума — производная тоже равна нулю, но ее знак меняется с «минуса» на «плюс».

Вывод: с помощью производной можно узнать о поведении функции всё, что нас интересует.

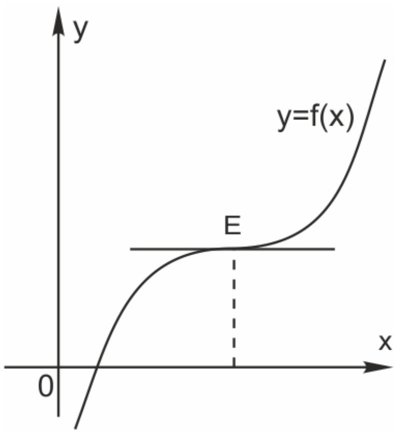
Если производная $f'(x)$ положительна, то функция $f(x)$ возрастает.
Если производная отрицательная, то функция убывает.
В точке максимума производная равна нулю и меняет знак с «плюса» на «минус».
В точке минимума производная тоже равна нулю и меняет знак с «минуса» на «плюс».

Запишем эти выводы в виде таблицы:

$f(x)$	возрастает	точка максимума	убывает	точка максимума	возрастает
$f'(x)$	+	0	-	0	+

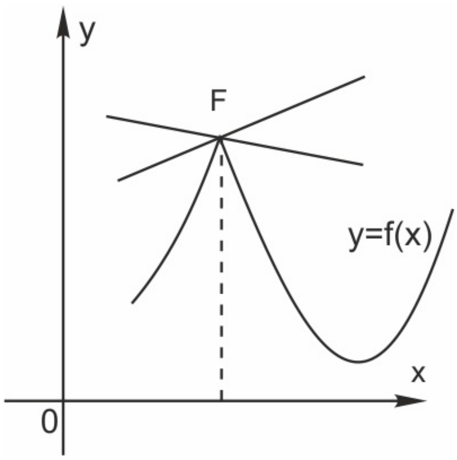
Сделаем два небольших уточнения. Одно из них понадобится вам при решении задач ЕГЭ. Другое — на первом курсе, при более серьезном изучении функций и производных.

1. Возможен случай, когда производная функции в какой-либо точке равна нулю, но ни максимума, ни минимума у функции в этой точке нет. Это так называемая *точка перегиба*:



В точке Е касательная к графику горизонтальна, и производная равна нулю. Однако до точки Е функция возрастала — и после точки Е продолжает возрастать. Знак производной не меняется — она как была положительной, так и осталась.

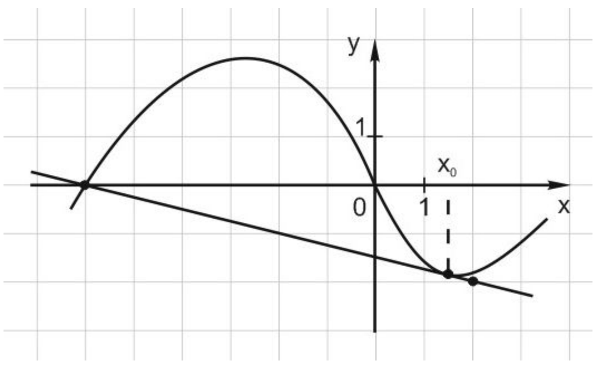
2. Бывает и так, что в точке максимума или минимума производная не существует. На графике это соответствует резкому излому, когда касательную в данной точке провести невозможно.



А как найти производную, если функция задана не графиком, а формулой? В этом случае применяется таблица производных.

Рассмотрим типовые задачи из вариантов ЕГЭ на тему «Производная».

1. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.



Начнём с определения знака производной. Мы видим, что в точке x_0 функция убывает, следовательно, её производная отрицательна. Касательная в точке x_0 образует тупой угол α с положительным направлением оси X. Поэтому из прямоугольного треугольника мы найдём тангенс угла φ, смежного с углом α.

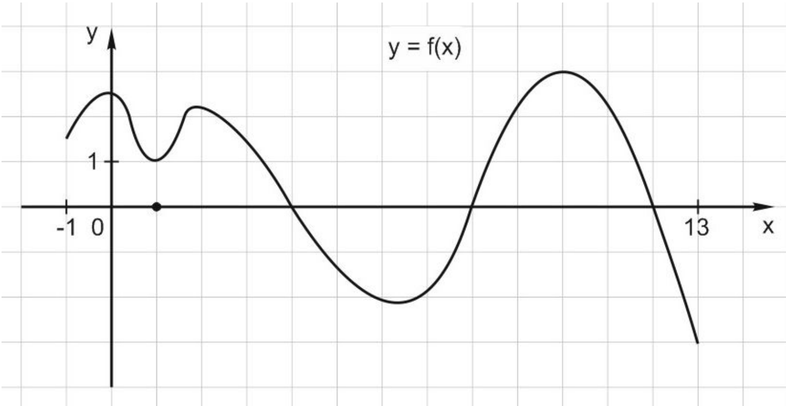
Мы помним, что тангенс угла в прямоугольном треугольнике равен отношению противолежащего катета к прилежащему:

$\operatorname{tg} \varphi = 0,25.$ Поскольку $\alpha + \varphi = 180°$, имеем:

$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(180° - \varphi) = -\operatorname{tg} \varphi = -0,25.$

Ответ: -0, 25.

2. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определённой на интервале (−1; 13). Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.

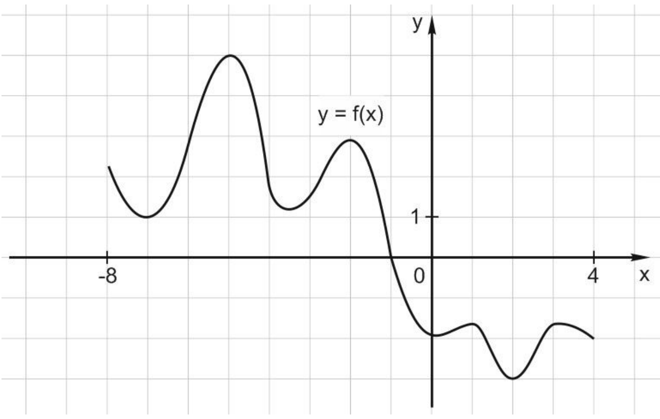


Внимательно читаем задание. Изображён график функции, а вопрос — о производной. Вспоминаем, что производная положительна там, где функция возрастает. Обратите внимание, что в концах отрезка функция не определена — там пустые точки.

В точках 0, 1, 2, 10 функция имеет экстремумы (максимумы или минимумы), то есть не является возрастающей. Считаем количество целых точек, в которых функция возрастает. Их всего три — точки 7, 8 и 9.

Ответ: 3.

3. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ *— производной функции* $f(x)$*, определенной на интервале (-8;4). В какой точке отрезка* $[-7; -3]$ *функция* $f(x)$ *принимает наименьшее значение?*



Эта задача — одна из любимых ловушек, которые составители вариантов ЕГЭ заготовили для абитуриентов.

В ней спрашивается о наименьшем значении функции — а нарисована не функция,

а ее производная!

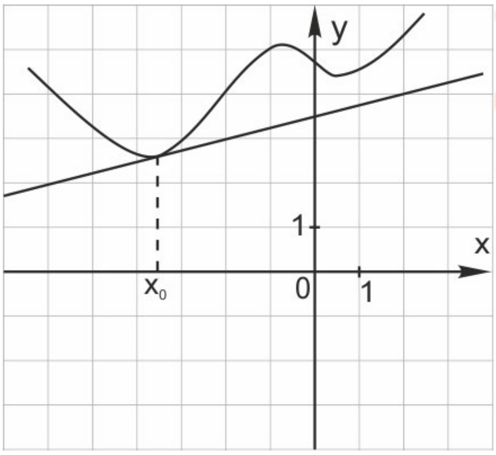
На отрезке [-7; -3] производная этой функции $y = f'(x)$ (график которой мы видим) положительна. На этом отрезке график производной расположен выше оси X. А раз производная положительна, значит, на этом отрезке функция $y = f(x)$ возрастает. Чем больше значение аргумента, тем больше значение функции.

Значит, наименьшее значение на отрезке [-7; -3] функция $y = f(x)$ принимает в крайней левой точке этого промежутка, то есть в точке -7.

Ответ: -7.

4.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

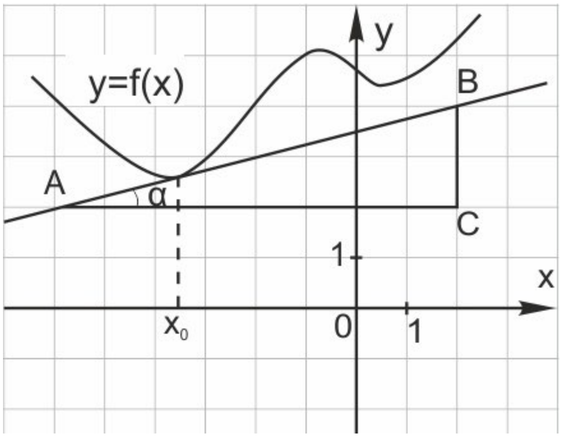


Решение:

Производная функции $f(x)$ в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной, проведенной в точке x_0.

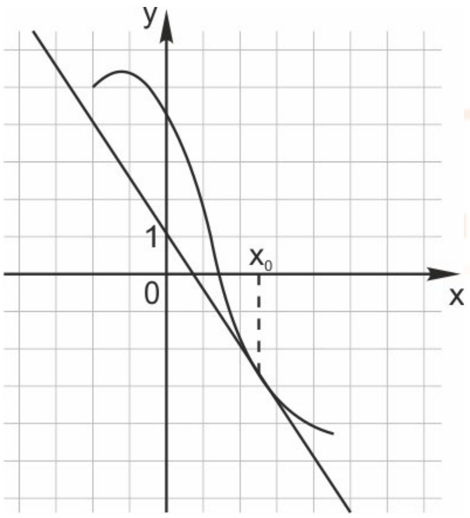
Достроив до прямоугольного треугольника ABC, получим:

$$f'(x_0) = tg\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{8} = 0{,}25$$



Ответ: 0,25.

5. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Решение:

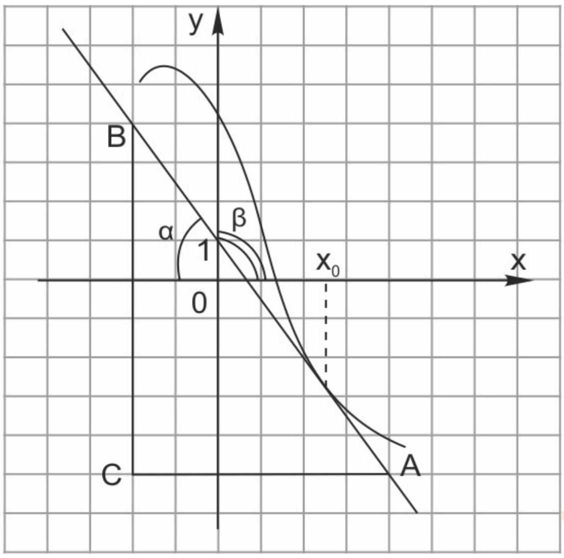
Производная функции в точке равна тангенсу угла наклона касательной, проведенной к графику функции в этой точке (и угловому коэффициенту касательной).

$f'(x) = tg\beta = k.$

В точке x_0 функция $y = f(x)$ убывает. Касательная, проведенная к ее графику в этой точке, образует тупой угол β с положительным направлением оси X. Найдем тангенс острого угла α, смежного с углом β, из прямоугольного треугольника ABC на рисунке.

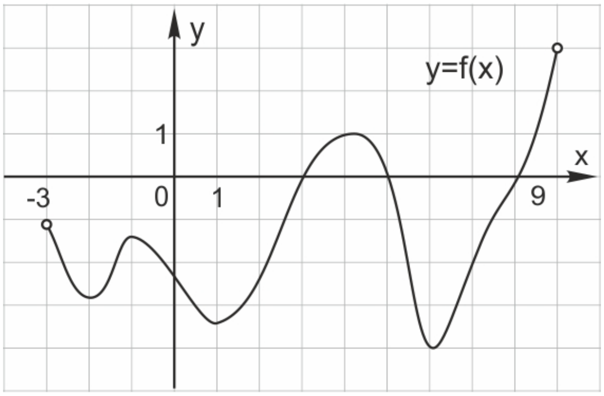
$\alpha + \beta = 180°$

$tg\beta = -tg\alpha = -1{,}5.$



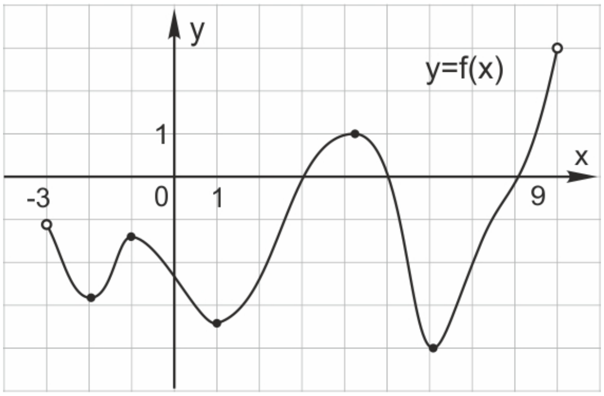
Ответ: -1,5

6. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-3; 9)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



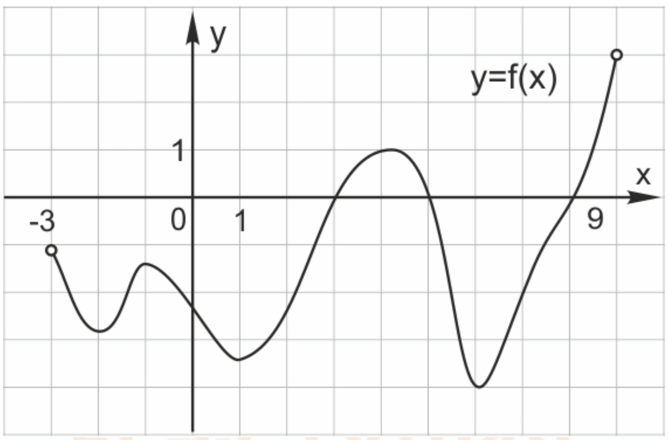
Решение:

Производная функции $f'(x) = 0$ в точках максимума и минимума функции $f(x)$. Таких точек на графике 5.



Ответ: 5.

7. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-3; 9)$. Определите, на каких промежутках производная функции отрицательна. В ответе запишите длину наибольшего такого промежутка.

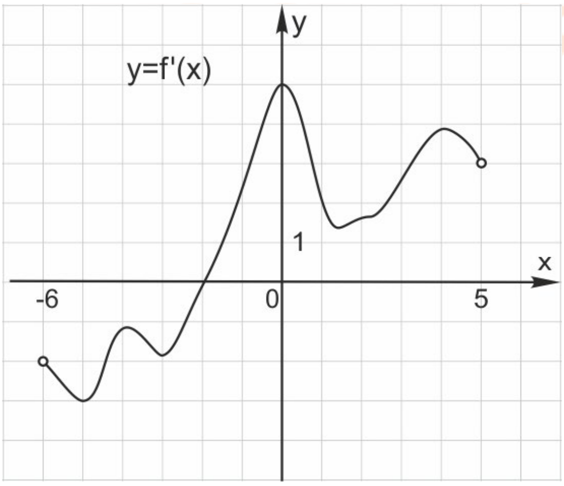


Решение:

Производная функции $f'(x)$ отрицательная на промежутках, на которых функция убывает. Таких промежутков на графике три. Наибольший промежуток убывания функции: от – 1 до 1. Его длина равна 2.

Ответ: 2

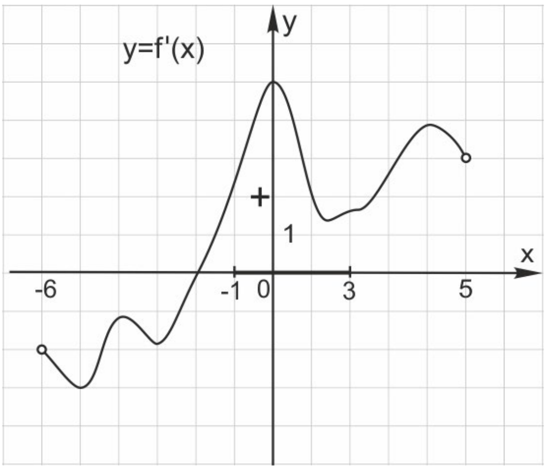
8. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 5)$. В какой точке отрезка $[-1; 3]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



Решение:

Изображен график производной, а спрашивают о поведении функции. График функции не нарисован. Но мы знаем, как производная связана с поведением функции.

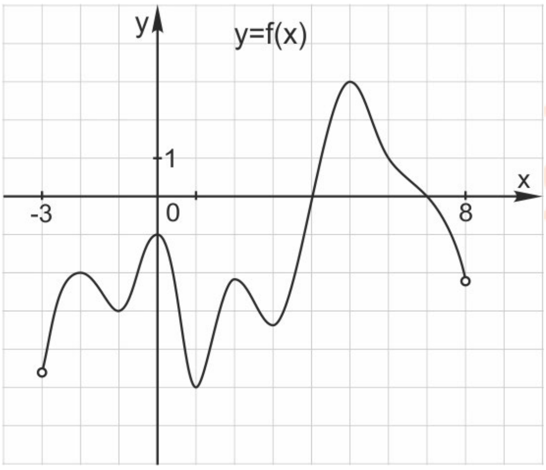
На отрезке [-1;3] производная функции $f(x)$ положительна.



Значит, функция $f(x)$ возрастает на этом отрезке. Большим значениям x соответствует большее значение $f(x)$. Наибольшее значение функции достигается в правом конце отрезка, то есть в точке 3.

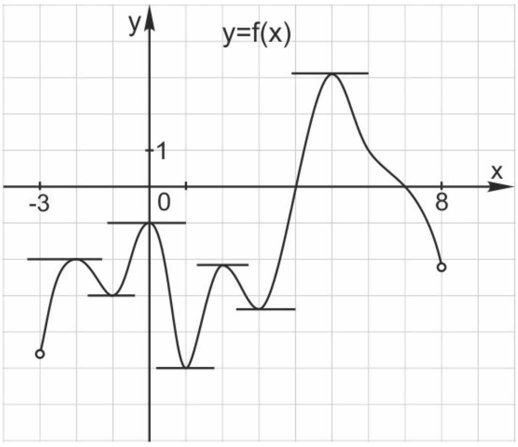
Ответ: 3.

9. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 1$.



Решение:

Прямая $y = 1$ параллельна оси абсцисс. Найдем на графике функции $y = f(x)$ точки, в которых касательная параллельна оси абсцисс, то есть горизонтальна. Таких точек на графике 7. Это точки максимума и минимума.



Ответ: 7.

В первой части ЕГЭ по математике есть задачи на нахождение точек максимума и минимума функции, а также наибольших и наименьших значений функции с помощью производной.

В таких задачах мы будем находить производную с помощью таблицы и правил дифференцирования.

Таблица производных

$f(x)$ (функция)	$f'(x)$ (производная)
С (константа)	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
Правила дифференцирования	
$(u+v)' = u' + v'$ $(u-v)' = u' - v'$ $(u \cdot v)' = u'v + v'u$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ $(c \cdot f)' = c(f)'$	u, v, f – функции c – константа

10. Найдите наибольшее значение функции

$y = -x^2 + 10x - 24$

на отрезке [4,2; 4,5]

Решение:

График функции y(x) – квадратичная парабола с ветвями вниз. Вершина параболы находится в точке $x_0 - \frac{b}{2a} = 5$, значит, $x_0 = 5$ – точка максимума функции. На отрезке [4,2; 4,5] (левее точки максимума) функция $y(x)$ монотонно возрастает и наибольшее значение принимает в правом конце этого отрезка, то есть при x = 4,5. Подставив x = 4,5 в формулу функции $y = -x^2 + 10x - 24$, получим, что y(4,5) = 0,75.

Обратите внимание, что нам даже не понадобилось брать производную.

Ответ: 0,75

11. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 4$ на отрезке [-2;0].

Решение:

Наибольшее значение функции на отрезке может достигаться в точке максимума или на конце отрезка. Будем искать точку максимума функции $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 4$ с помощью производной. Найдем производную и приравняем ее к нулю.

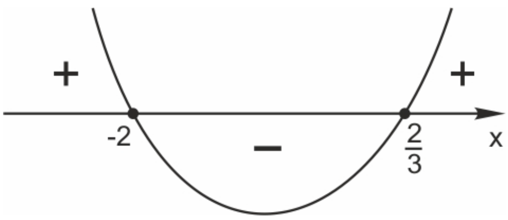
$y' = 3x^2 + 4x - 2$

$y' = 0;$

$3x^2 + 4x - 4 = 0;$

$$D = 64;\ x = \frac{-4 \pm 8}{6};\quad x_1 = \frac{2}{3},\qquad x_2 = -2.$$

Найдем знаки производной.



В точке $x = -2$ производная равна нулю и меняет знак с "+" на "-". Значит,

$x = -2$ – точка максимума функции $y(x)$. Поскольку при $x \in [-2; 0]$ функция $y(x)$ убывает, $y_{max}(x) = y(-2) = 12$.

Ответ: 12

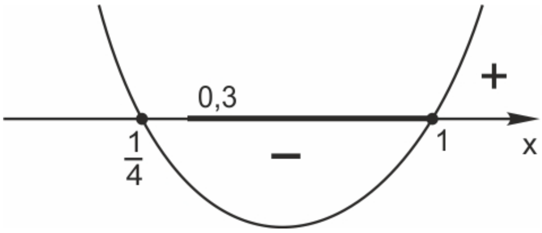
12. Найдите наименьшее значение функции $y = 4x^2 - 10x + 2\ln x - 5$ на отрезке $[0,3;\ 3]$.

Решение:
Найдем производную функции $y = 4x^2 - 10x + 2\ln x - 5$ и приравняем ее к нулю.

$y'(x) = 8x - 10 + \frac{2}{x}$;

$y'(x) = 0$ при $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{4}$.

Найдем знаки производной.



Точка $x_1 = 1$ - точка минимума функции $y(x)$. Точка $x_2 = \frac{1}{4}$ не лежит на отрезке $[0{,}3;\ 1]$. Поэтому

$y(0{,}3) > y(1)$ и $y(3) > y(1)$.

Значит, наименьшее значение функции на отрезке $[0{,}3;\ 1]$ достигается при $x = 1$. Найдем это значение.

$y_{min}(x) = y(1) = 4 - 10 - 5 = -11$

Ответ: -11.

13. Найдите наименьшее значение функции $y = 9x - \ln(9x) + 3$ на отрезке $\left[\frac{1}{18}; \frac{5}{18}\right]$.

Решение:

Иногда перед тем, как взять производную, формулу функции полезно упростить.

$y = 9x - \ln(9x) + 3 = 9x - \ln 9 - \ln x + 3$. Мы применили формулу для логарифма произведения.

$y'(x) = 9 - \frac{1}{x} = \frac{9x-1}{x}$; $y' = 0$ при $x = \frac{1}{9}$.

Если $0 < x < \frac{1}{9}$, то $y'(x) < 0$. Если $x > \frac{1}{9}$, то $y'(x) > 0$.

Значит, $x = \frac{1}{9}$– точка минимума функции y(x). В этой точке и достигается наименьшее значение функции на отрезке $\left[\frac{1}{18}; \frac{5}{18}\right]$.

$y_{min}(x) = y\left(\frac{1}{9}\right) = 1 + 3 = 4$

Ответ: 4

14. Найдите наибольшее значение функции $y(x) = 14x - 7tgx - 3{,}5\pi + 11$ *на отрезке* $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

Решение:

Найдем производную функции $y(x) = 14x - 7tgx - 3{,}5\pi + 11$.

$y'(x) = 14 - \frac{7}{cos^2x}$.

Приравняем производную к нулю:

$$14 - \frac{7}{cos^2x} = 0$$

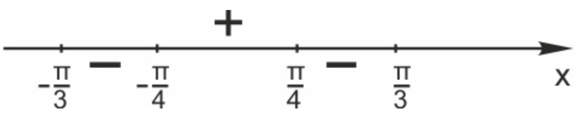
$$cos^2x = \frac{1}{2}$$

$cos^2x = \pm\,\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\,\frac{\sqrt{2}}{2}$. Поскольку $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$, $y'(x) = 0$, если $x = \pm\frac{\pi}{4}$.

Найдем знаки производной на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

$y'(0) = 14 - 7\ > 0$,

$y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = y'\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 14 - 28\ < 0.$



При $x = \frac{\pi}{4}$ знак производной меняется с «плюса» на «минус». Значит, $x = \frac{\pi}{4}$ – точка максимума функции y(x).

Сравним значения функции в точке максимума и на конце отрезка, то есть при

$x = -\frac{\pi}{3}$ и $x = \frac{\pi}{4}$.

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -7 + 11 = 4$$

$$y\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{14\pi}{3} + 7tg\frac{\pi}{3} - 3{,}5\pi + 11\ < 4.$$

Мы нашли, что $y_{max}(x) = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -7 + 11 = 4.$

Заметим, что если вам попадется такая задача в первой части ЕГЭ по математике, то находить значение функции при $-\frac{\pi}{3}$ не обязательно. Как мы видим, это значение – число иррациональное. А в первой части ЕГЭ по математике ответом может быть только целое число или конечная десятичная дробь.

Ответ: 4

БОНУС: Глава 16. Комплексные числа

Все мы ждали, что в ЕГЭ-2022 по математике появится новая задача по теме «Комплексные числа». Оказалось, что в 2022 комплексных чисел в вариантах ЕГЭ все-таки не будет, однако ЕГЭ планируют менять и дорабатывать, и скорее всего, в следующие годы эта тема появится в школьной программе и в вариантах экзамена.

Что же такое комплексные числа?

Начнем с хорошо известных вам фактов.

Вспомним, что возвести число в квадрат — значит умножить его само на себя.

Если положительное число возвести в квадрат — результат будет положительный.

Если отрицательное число возвести в квадрат — результат тоже положительный. «Минус на минус дает плюс», — это мы не раз слышали на уроках математики.

Например, уравнение $x^2 = 4$ имеет 2 решения: $x = 2$ и $x = -2$.

Число 2 называют арифметическим квадратным корнем из 4, то есть $2 = \sqrt{4}$.

А можно ли какое-нибудь число возвести в квадрат, чтобы результат получился отрицательный? И если нет, то почему?

Ведь отрицательные числа ничем не хуже положительных. Баланс мобильного телефона может быть положительным или отрицательным. Температура может быть равна +5 градусов Цельсия, а может быть и минус 5 градусов. На числовой оси положительные и отрицательные числа расположены симметрично. Почему же из положительных чисел квадратный корень извлекать можно, из нуля тоже можно (он равен нулю), а из отрицательных нельзя?

А что, если — сказали однажды математики, - существует такое число, квадрат которого равен минус единице?

И называется это число мнимой единицей, а обозначается буквой i.

Вот какая необычная формула получилась:

$i = \sqrt{-1}$.

Получается, что уравнение $x^2 = -1$ имеет 2 решения: i и минус i.

$i = \sqrt{-1}$;

$-i = -\sqrt{-1}$

А уравнение $x^2 = -4$ имеет решения $-2i$ и $2i$.

Теперь нам не страшны квадратные уравнения, в которых дискриминант отрицателен.

Например, уравнение $x^2 - x + 2 = 0$

Его дискриминант равен 1 — 4 = - 3.

Его корни: $x = 1 \pm \sqrt{-3} = 1 \pm i\sqrt{3}$.

Числа вида $z = x + iy$ называются комплексными. При этом x называется действительной частью комплексного числа z, а y — его мнимой частью.

Записывается это так:

$x = Re\, z$

$y = Im\,z$

Сокращения понятны тем, кто изучает английский: Re — Real, Im — Imaginary.

Помните, мы говорили о том, какие бывают числа?

Натуральные числа применяются для счета предметов. Множество натуральных чисел обозначается N.

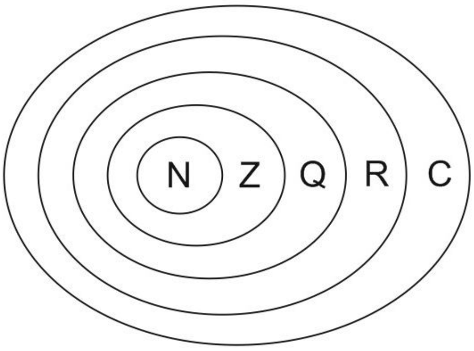
Целые числа — это положительные, отрицательные и ноль. Например, 4, 78, -121, 0 — целые числа. Множество целых чисел Z содержит в себе множество натуральных.

Рациональные числа — те, которые можно записать в виде обыкновенной дроби вида $\frac{p}{q}$, где p — целое, q — натуральное. Например, $\frac{2}{5};\ -\frac{1}{2};\ 4;\ \frac{8}{3}$ — числа рациональные. Мы проходили их в начальной и средней школе. Если рациональное число записать в виде десятичной дроби, она будет периодической, например, $\frac{1}{3} = 0{,}33333$ ... Множество рациональных чисел обозначается Q и содержит в себе множество целых чисел.

В старших классах мы узнали об иррациональных числах — таких, как π, e или $\sqrt{2}$. Их невозможно записать в виде обыкновенной дроби, а если выразить в виде десятичной — она будет бесконечной непериодической. И казалось, что мы знаем о числах всё. Все числа, какие только нам встречались, входили в множество действительных чисел R.

Когда мы пишем: $x \in R$ — это значит, что число x действительное. Мы помним, что действительные числа можно изображать точками на числовой прямой, которую еще называют действительной осью.

А теперь оказывается, что R — это подмножество множества комплексных чисел C.



Действительные числа еще называют «вещественными». Они описывают наш вещественный мир. В самом деле, натуральные числа применяем для счета предметов. С дробями тоже понятно: половинка яблока или $\frac{1}{6}$ пиццы. С отрицательными числами все знакомы: достаточно зимой посмотреть на градусник за окном. И даже иррациональные числа можно «увидеть»: например, длина окружности радиуса 1 или диагональ квадрата со стороной 1 являются иррациональными числами.

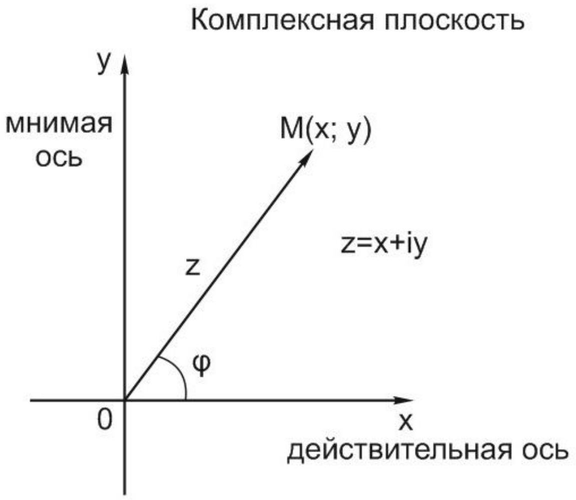
Но где же в мире — мнимые и комплексные числа? Неужели они нужны для описания того, что мы не можем потрогать или посчитать по пальцам?

Да, так и есть. Комплексные числа - удобный инструмент для построения математических моделей волн и колебаний. Электро- и радиотехника, теоретическая и квантовая физика — все они пользуются комплексными числами. Мир элементарных частиц живет по законам, описываемым функциями комплексных переменных. Так что продолжим их изучение.

Комплексная плоскость

Где же находятся мнимые числа, если на числовой прямой для них места нет? Очень просто. Мнимые числа — на мнимой оси. А комплексные числа вида $z = x + iy$ — на комплексной плоскости.

Каждому комплексному число $z = x + iy$ соответствует точка на комплексной плоскости.



Расстояние от нуля до этой точки называется модулем комплексного числа:

$|\vec{r}| = |z|$.

Угол φ между направлением на эту точку и положительным направлением действительной оси называется аргументом комплексного числа: $\varphi = \operatorname{Arg} z$

Аргумент комплексного числа определен с точностью до $2\pi k$.

Аналогично в тригонометрии: каждая точка на единичной окружности соответствует бесконечному множеству углов, отличающихся на $2\pi k$, где k — целое.

$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$.

Здесь $\arg z$ — главное значение аргумента

$-\pi < \arg z \leq \pi$.

Иногда главное значение аргумента комплексного числа определяют на отрезке $[0; 2\pi]$.

Если $z = 0$, $\operatorname{Arg} z$ не определен.

Комплексное число можно записать как в алгебраической форме $z = x + iy$, так и в тригонометрической.

Поскольку $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, получим:

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Это тригонометрическая форма записи комплексного числа. Здесь

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\cos\varphi = \frac{x}{r}$, $\sin\varphi = \frac{y}{r}$

При переходе от алгебраической формы записи к тригонометрической считаем, что

$\varphi = \arg z$ принимает значения $-\pi < \arg z \leq \pi$.

Обратите внимание, что в записи $z = x + iy$ число x — действительное.

Число iy — мнимое.

Задача 1. Запишите число

$z = -1 + i$ в тригонометрической форме.

Решение:

$|z| = r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2},\ \arg z = \varphi,\ \cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi = \frac{3\pi}{4}$

Так как $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \frac{i\sin 3\pi}{4}\right)$$

Как видим, для освоения темы «Комплексные числа» надо отлично знать тригонометрию.

Действия над комплексными числами

Два комплексных числа равны друг другу, если равны соответственно их действительные и мнимые части.

$$z_1 = z_2 \ \Leftrightarrow \ \begin{matrix} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{matrix}$$

Сравнивать комплексные числа нельзя. Операции «больше» и «меньше» для комплексных чисел не определены.

Два комплексных числа, отличающиеся только знаком мнимой части, называются комплексно-сопряженными. Вот такие:

$z = x + iy$
$z = x - iy$

Возьмем два комплексных числа

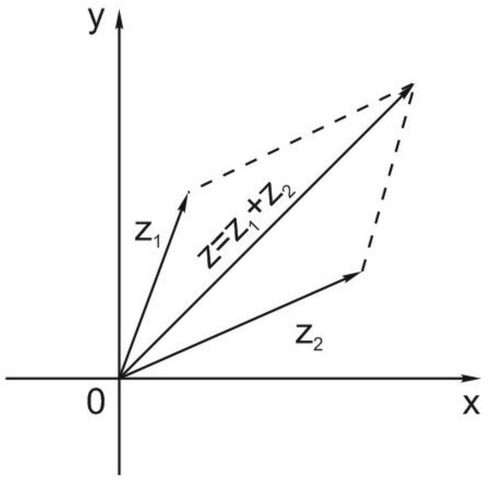
$z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$.

Определим для них операции сложения и вычитания.

Сложение:

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

Похоже на правило сложение векторов, не правда ли?



Так же, как и для действительных чисел, $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, то есть от перемены мест слагаемых сумма не меняется (коммутативность сложения). Также выполняется ассоциативность сложения, то есть

$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

Еще одно важное свойство:

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Это знакомое нам неравенство треугольника.

Вычитание:

$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$;

$|z_1 - z_2| = d$ — расстояние между точками z_1 и z_2.

Задача 2. Определите, какая фигура на комплексной плоскости является решением уравнения

$|z - 2i| = 1$.

Решение:

Прочитаем это уравнение так же, как мы делали с обычными уравнениями с модулем. Расстояние от точки z до точки $2i$ равно 1. Это значит, что точки, соответствующие решениям данного уравнения, лежат на окружности с центром в точке $z = 2i$ радиусом 1.

Если сложение и вычитание комплексных чисел вопросов не вызывают, то для умножения правила не такие очевидные. Вот какой будет формула произведения комплексных чисел:

$z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$.

Например, подставив в эту формулу $z_1 = z_2 = i$, получим уже знакомое равенство:

$i^2 = -1$.

Умножение комплексных чисел обладает теми же свойствами, что и умножение действительных:

$z_1 z_2 = z_2 z_1$

$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

Но если умножение комплексных чисел настолько сложно — что же делать с возведением в степень? Оказывается, что и умножение, и возведение комплексных чисел в степень удобнее выполнять, записывая числа в тригонометрической форме.

$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

Возведение в степень:

$z^n = \left(r(\cos\varphi + i \sin\varphi)\right)^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$

Последнее равенство называется **формула Муавра**.

Задача 3.

Вычислите: $\left(1 + \sqrt{3}i\right)^9$

Решение:

Для числа $z = 1 + \sqrt{3}i$

$r = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2;\ \ \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\varphi = \frac{1}{2},$

$\varphi = \frac{\pi}{3}$

$z = 1 + \sqrt{3}i = r(\cos\varphi + i \sin\varphi) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)$

$\left(1 + \sqrt{3}i\right)^9 = 2^9\left(\cos\frac{9\pi}{3} + i \sin\frac{9\pi}{3}\right) = 512(\cos 3\pi + i \sin 3\pi) = -512.$

Деление комплексных чисел определяем как действие, обратное умножению.

$\frac{z_1}{z_2} = z$, если $z \cdot z_2 = z_1$

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1,$

$z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0,$

$z = x + iy$

$\begin{cases} x_1 = xx_2 - yy_2 \\ y_1 = xy_2 + yx_2 \end{cases}$, отсюда

$x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2};\ \ y = \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$

Сложные формулы, не правда ли? Попробуем применить.

Задача 4:

$$\frac{1+3i}{2+i}=\frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{2-i+6i+3}{4+1}=\frac{5+5i}{5}=1+i$$

Намного удобнее выполнять деление комплексных чисел, записав их в тригонометрической форме:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

Извлечение корней из комплексных чисел - еще интереснее. Во-первых, для извлечения корня n-ной степени из комплексного числа лучше всего записать его в тригонометрической форме.

Во-вторых, для любого $z\neq 0$ выражение $\sqrt[n]{z}$ принимает ровно n различных значений.

Пусть ω — корень n-ной степени из комплексного числа z; $\omega=\sqrt[n]{z}$

Тогда $\omega^n=z$. Записав число z в тригонометрической форме, получим:

$$\omega=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}++i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$$

Обратите внимание — для корня n-ной степени получим n различных значений корня.

Задача 5:

Найдем

$\omega=\sqrt[3]{i}$

$$\sqrt[3]{i}=\sqrt[3]{1}\cdot\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right)$$

$k=0,1,2.$

При $k=0$ $\omega_0=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot\frac{1}{2}$

При $k=1$ $\omega_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot\frac{1}{2}$

При $k=2$ $\omega_3=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$

Задача из Проекта ЕГЭ-2022, Комплексные числа

Решим задачу из Проекта ЕГЭ-2022 по теме «Комплексные числа».

Задача 6

Про комплексное число z известно, что $|z-4-7i|=|z+4-i|$.

Найдите наименьшее значение $|z|$.

Решение:

Обозначим $z=x+iy$.

Пусть $z_1 = 4 + 7i;\ z_2 = 4 - i.$

Известно, что

$|z - 4 - 7i| = |z + 4 - i|.$

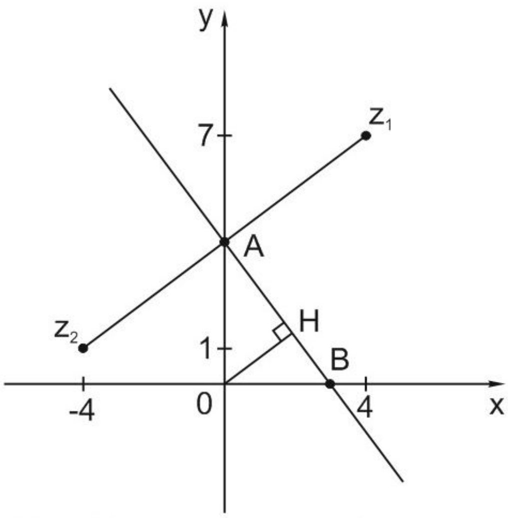
Получим:

$|z - z_1| = |z + z_2|$

$|(x + iy) - (4 + 7i)| = |(x + iy) - (-4 + i)|$

1 способ.

Расстояния от точки, соответствующей числу z, до точек z_1 и z_2 должны быть равны. Отметим точки z_1 и z_2 на комплексной плоскости. Равноудаленными от точек z_1 и z_2 будут все точки, лежащие на серединном перпендикуляре к отрезку, соединяющему z_1 и z_2. По условию задачи, из этих точек надо выбрать такую, для которой |z| принимает наименьшее значение, то есть наименее удаленную от начала координат. Другими словами — найдем расстояние от начала координат до данной прямой.



Это показано на рисунке. Точка H соответствует комплексному числу z, лежащему на прямой, все точки которой равноудалены от z_1 и z_2, при этом расстояние от 0 до z — наименьшее. Найдем это расстояние (равное OH) из прямоугольного треугольника AOB. Его катеты равны 3 и 4, гипотенуза равна 5. Записав площадь треугольника AOB двумя способами, получим:

$$z = \frac{12}{5} = 2{,}4$$

2 способ.

Вернемся к выражению

$|(x + iy) - (4 + 7i)| = |(x + iy) - (-4 + i)|$

Запишем его в виде:

$|(x - 4) + i(y - 7)| = |(x + 4) + i(y - 1)|$

Мы получили, что модули двух комплексных чисел равны. Модуль комплексного числа равен $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Возведя это выражение в квадрат, получим, что $z^2 = x^2 + y^2$. Значит, если равны модули двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, то $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$

В нашем случае:

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 14y + 49 = x^2 + 8x + 16 + y^2 - \underline{2y} + 1$$

$$16x + 12y - 48 = 0$$

$4x + 3y - 12 = 0$. Выразим отсюда x;

$x = \frac{12-3y}{4} = 3 - \frac{3}{4}y$ и найдем наименьшее значение выражения $z^2 = x^2 + y^2$.

$$x^2 + y^2 = y^2 + \left(3 - \frac{3}{4}y\right)^2 = y^2 + 9 - \frac{9}{2}y + \frac{9}{16}y^2 = \frac{25}{16}y^2 - \frac{9}{2}y + 9$$

Мы получили функцию $t(y)$. Обычную функцию от действительной переменной. Найдем наименьшее значение функции $t(y) = \frac{25}{16}y^2 - \frac{9}{2}y + 9$. Это квадратичная функция, ее график - парабола с ветвями вверх, и наименьшее значение достигается в вершине параболы.

$$y_0 = \frac{9 \cdot 16}{2 \cdot 2 \cdot 25} = \frac{36}{25}$$

$$t(y_0) = \frac{25}{16} \cdot \frac{36^2}{25^2} - \frac{9}{2} \cdot \frac{36}{25} + 9 = \frac{144}{25} = |z|^2_{min}.$$

$$|z|_{min} = \frac{12}{5} = 2{,}4$$

Дорогие друзья! Книга заканчивается, но наша совместная работа только начинается. Вы знаете, что в ЕГЭ по математике есть и более сложные темы: планиметрия и стереометрия из второй части, «параметры» и нестандартные задачи на числа и их свойства – то, что я люблю больше всего.

Много лет я помогаю школьникам осваивать самые сложные задачи ЕГЭ. Пишу книги, веду Онлайн-курс и строю умную систему онлайн-обучения, каждую неделю провожу стримы на Ютьюбе. Работаю не только онлайн, но и очно: с декабря по март в Москве проходит мой курс М-100 (4 интенсива по решению самых сложных задач ЕГЭ), а летом – Школа мастерства для учителей и репетиторов. Ежегодно десятки моих выпускников получают на экзамене результаты выше 90 баллов.

Моя цель - помочь вам разобраться со школьной математикой, показать, что в ней нет ничего сложного.

Вы наверняка слышали фразу: «Математику еще и для того учить следует, что она ум в порядок приводит». Автором этих слов считается Михаил Ломоносов. Правда, пока не нашлось документальных подтверждений того, что он действительно это сказал или написал. Возможно, этот афоризм придумал кто-то из советских педагогов и приписал великому русскому ученому. :-)

Однако в данном случае не так важно, кто именно высказал идею. Главное – что эти слова находят свое подтверждение в жизни.

Математика – это язык, на котором говорят все точные науки. Это тренировка мышления. И еще – расширение ваших возможностей. Да, именно так!

Сейчас объясню.

Почему-то людям свойственно ограничивать свои возможности.

«Я не понимаю музыку, - говорит себе человек. – У меня нет музыкального слуха». Убедив себя в этом, можно годами слушать одну и ту же примитивное «попсу» и полностью перекрыть себе дорогу в мир настоящей музыки.

«У меня нет способностей к языкам. Обойдусь без английского!» Конечно, обойдетесь! Только английский – ключ ко всему миру. А мир не ограничивается несколькими «раскрученными» курортами.

Я много путешествую. Каждый год езжу в Гималаи и Тибет. Без английского там никуда. А однажды, при перелете из окрестностей Килиманджаро на остров Занзибар, у меня пропал рюкзак. Его просто отправили в другой аэропорт. О, как я говорила по-английски, выручая свое имущество! Легко и свободно, как на родном! Вообще не задумываясь, есть ли у меня способности к языкам! :-)

Понимаете, в чем дело? Отказавшись развивать какую-либо способность, человек добровольно перекрывает себе самые интересные пути. А зачем?

Есть такая японская пословица: **«Если ты перестал учиться – ты умер».**

Если вы ездите в метро – обратите внимание, сколько народу сидит, усердно разгадывая кроссворды и судоку. Эти люди когда-то решили, что у них «нет способностей к математике» и выбрали себе работу попроще, где думать не надо. А теперь их мозги «проголодались» и требуют хоть какой-нибудь пищи!

Посмотрите, сколько интересных и престижных профессий связано с математикой. Возможно, одна из них – ваша? Просто вы об этом пока не знаете. А еще больше таких, где нужна логика, точность, интуиция, умение сформулировать задачу и получить ответ. Программист, архитектор или предприниматель вряд ли ежедневно решают тригонометрические уравнения или берут интегралы, но математические навыки и тренированный мозг им необходимы.

А ЕГЭ непременно сдастся. Никуда не денется. Потому что любая задача решается, если знать подходы и секреты. Любое препятствие можно взять, если захотеть. И знайте, что выигрывает тот, кто думает и действует.

До встречи, друзья!

Получив книгу, вы подписались на рассылку ЕГЭ-Студии (а если нет – подпишитесь). Рекомендую не отписываться от нее, пока не сдадите ЕГЭ. В нашей рассылке – решение задач, новости ЕГЭ, разборы официальных работ Статграда и многое другое.

Сайт моей компании «ЕГЭ-Студия»: https://ege-study.ru

Курсы подготовки к ЕГЭ на высокие баллы – в Москве и онлайн. Все предметы. Средние результаты выпускников: математика 83 балла, русский язык 88 баллов, обществознание 86 баллов.

Онлайн-курс

Канал на YouTube

Мои книги можно приобрести в интернет-магазинах: Лабиринт, Озон, Читай-город и других.

Математика. Авторский курс подготовки к ЕГЭ.

ЕГЭ. Математика. Задачи высокой и повышенной сложности.

ЕГЭ. Математика. Секретные приемы репетитора.

Справочник для подготовки к ЕГЭ по математике

Умный сборник авторских задач для подготовки к ЕГЭ по математике.

Задачи с параметрами. 12 методов решения.

Наша группа ВКонтакте

Телеграм-канал ЕГЭ-Студии

Телеграм-канал Анны Малковой

О замеченных опечатках пишите на почту: anna@ege-study.ru

Справочный материал:

1. Таблица квадратов натуральных чисел от 10 до 30

(учите наизусть, как таблицу умножения)

x	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x^2	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400

x	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x^2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841	900

2. Греческий алфавит

Αα	Ββ	Γγ	Δδ	Υυ	Ζζ	Ηη	Θθ	Ιι	Κκ	Λλ	Μμ
альфа	бета	гамма	дельта	эпсилон	дзета	эта	тета	йота	каппа	лямбда	мю

Νν	Ξξ	Οο	Ππ	Ρρ	Σσ	Ττ	Υυ	Φφ	Χχ	Ψψ	Ωω
ню	кси	омикрон	пи	ро	сигма	тау	ипсилон	фи	хи	пси	омега