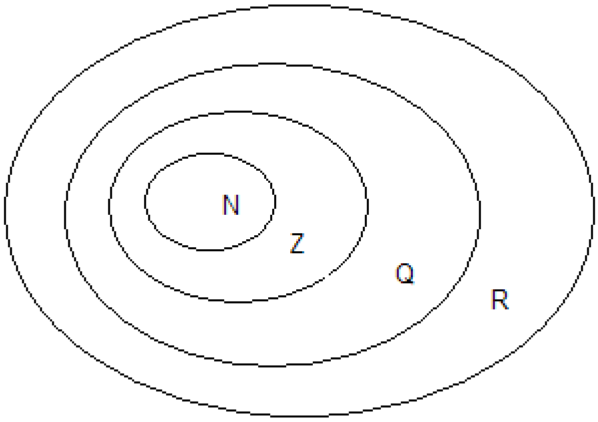
Марафон по задаче 19 ЕГЭ по математике.

«Числа и их свойства», 2024

Необходимая теория



Натуральные числа — это числа 1, 2, 3, ... – те, чтомы используем для счёта предметов. Ноль не является натуральным числом. Множество натуральных чисел обозначается N.

Целые числа — это 0, ±1, ±2, ±3 ... Множество целых чисел обозначается Z.

Рациональные — числа, которые можно записать в виде дроби $\frac{p}{q}$, где p – целое, а q – натуральное. Например, 3; $\frac{1}{2}$; $\frac{7}{15}$; 0,12. Рациональные числа – это периодические десятичные дроби. Множество рациональных чисел обозначается Q.

Иррациональные числа – те, которые нельзя записать в виде $\frac{p}{q}$или в виде периодической десятичной дроби. Числа π и e, $\sqrt{2}$, $\log_7 9$– иррациональные.

Множества рациональных и иррациональных чисел вместе образуют множество **действительных чисел** R.

Число $\boldsymbol{a}$ делится на число $\boldsymbol{b \neq 0}$, если найдется такое число c такое, что $a = bc$. Например, 15 делится на 3, а 49 делится на 7. Обозначение: $a \; \vdots \; b$

Если a делится на b, то число b называется **делителем** числа a.

- Если числа a и b делятся на c, то $a + b$ тоже делится на c.

- Если числа a и b делятся на c, а m и n – целые, то $\mathrm{m}a + \mathrm{n}b$ тоже делится на c.

Формула деления с остатком. Если $a = b\mathrm{c} + r$, то число a делится на b с остатком r.

Например, при делении 9 на 4 мы получаем частное 2 и остаток 1, то есть $9 = 4 \cdot 2 + 1$.

Простые числа – те, что делятся только на себя и на единицу. Единица не является ни простым, ни составным числом. Простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19…

Числа называются взаимно простыми, если они не имеют общих делителей, кроме 1.

Любое натуральное число можно разложить на простые множители.

Например, $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, а $98 = 2 \cdot 7 \cdot 7$.

Основная теорема арифметики: Любое натуральное число можно представить в виде произведения простых делителей, взятых в натуральных степенях, причем это разложение единственно.

$a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_S^{n_s}$

Например, $72 = 2^3 \cdot 3^2$.

Количество делителей натурального числа равно (n_1+1) (n_2+1)…(ns+1).

Наименьшее общее кратноедвух чисел (НОК) — это наименьшее число, **которое делится** на оба данных числа.

Наибольший общий делительдвух чисел (НОД) — это наибольшее число, **на которое делятся** два данных числа.

Признаки делимости

- $a \vdots 2 \Leftrightarrow$последняя цифра числа a четная.
- $a \vdots 3 \Leftrightarrow$сумма цифр числа a делится на 3;
- $a \vdots 5 \Leftrightarrow$ число a заканчивается на 0 или на 5;
- $a \vdots 4 \Leftrightarrow$ число, составленное из двух последних цифр числа a, делится на 4.
- $a \vdots 8 \Leftrightarrow$ число, составленное из трех последних цифр числа a, делится на 8.
- $a \vdots 9 \Leftrightarrow$сумма цифр числа a делится на 9.
- $a \vdots 10 \Leftrightarrow$последняя цифра числа a равна 0;
- $a \vdots 11 \Leftrightarrow$суммы цифр на четных и нечетных позициях числа a равны или их разность кратна 11.

Метод «Оценка плюс пример»

«Оценка плюс пример» — это специальное математическое рассуждение, которое применяется в некоторых задачах при нахождении наибольших или наименьших значений.

Предположим, что мы ищем наименьшее значение некоторой величины A. Действуем в два этапа.

1. **Оценка.** Показываем, что выполнено неравенство $A \geq m$.

2. **Пример.** Предъявляем пример, когда достигается равенство $A = m$.

1) Что такое «повезло»

1. *ЕГЭ-2023* Егор делит линейку на части. За одно действие он может отрезать от любого количества линеек равные части, имеющие целую длину.

а) Может ли Егор за 4 хода разделить линейку длиной в 16 см на части по 1 см?

б) Может ли Егор за 5 ходов разделить линейку длиной в 100 см на части по 1 см?

в) За какое наименьшее количество ходов Егор может разделить линейку длиной в 300 см на части по 1 см?

2. *ЕГЭ-2023, Санкт-Петербург* Есть контейнеры массой 7 тонн и массой 2 тонны и корабли грузоподъемностью 10 тонн.

а) Можно ли увезти за один раз 12 контейнеров массой 7 тонн и 24 контейнера массой 2 тонны на 15 кораблях?

б) Можно ли увезти за один раз 12 контейнеров массой 7 тонн и 18 контейнера массой 2 тонны на 13 кораблях?

в) На каком наименьшем количестве кораблей можно увезти за один раз 12 контейнеров массой 7 тонн и 45 контейнеров массой 2 тонны?

2) Что такое «Не повезло»

3. Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ состоит из различных натуральных чисел.

а) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_7$ ровно три числа делятся на 100?

б) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{49}$ ровно 11 чисел делятся на 100?

в) Для какого наибольшего натурального n может оказаться так, что среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ больше кратных 100, чем среди чисел $a_{2n+1}, a_{2n+2}, \ldots, a_{5n}$?

4. На доске в первой строке написано два натуральных числа n и $n+1$, а во второй строке по одному разу записаны те и только те натуральные числа, которые являются делителями одного из чисел первой строки. Например, если в первой строке написаны числа 3 и 4, то во второй строке написаны числа 1, 2, 3 и 4.

а) Может ли во второй строке быть написано ровно 6 чисел?

б) Может ли во второй строке быть написано ровно 4 числа, если $n > 4$?

в) Сколько существует таких чисел $n < 2000$, для которых во второй строке написано чёткое количество чисел?

3) Решаем пункты (а) и (б)

5. Дана правильная несократимая дробь $\frac{a}{b}$. За один ход можно увеличить числитель на знаменатель, а знаменатель на два числителя, т.е. получить несократимую дробь $\frac{a+b}{b+2a}$.

а) Можно ли из дроби $\frac{2}{3}$ получить дробь $\frac{29}{41}$.

б) Можно ли из некоторой дроби получить дробь $\frac{6}{7}$ за 2 хода.

в) Дробь $\frac{c}{d}$ больше $\frac{7}{10}$. Найдите минимальную дробь $\frac{c}{d}$, которую нельзя получить из другой правильной несокращаемой дроби за 2 хода.

6. Тридцать пять шариков массой 1 г, 2 г, ..., 35 г разложили по двум коробкам, в каждой коробке находится хотя бы один шарик. Масса каждого шарика выражается целым числом граммов. Затем из второй коробки переложили в первую один шарик. После этого средняя масса шариков в первой коробке увеличилась на 4 г.

а) Можно ли такое быть, если первоначально в первой коробке лежали только шарики массой 3 г, 12 г и 27 г?

б) Могла ли средняя масса шариков в первой коробке первоначально равняться 12,6 г?

в) Какое наибольшее число шариков могло быть первоначально в первой коробке?

7. С натуральным числом проводят следующую операцию: между каждыми двумя его соседними цифрами записывают сумму этих цифр (например, из числа 1923 получается число 110911253).

а) Приведите пример числа, из которого получается 2108124117.

б) Может ли из какого-нибудь числа получиться число 37494128?

в) Какое наибольшее число, кратное 11, может получиться из трехзначного числа?

4) Подготовительные задачи

Методы решения задач на числа и их свойства (№ 18 ЕГЭ)

1) Метод «Оценка плюс пример»
2) «Заготовка» для решения всех трех пунктов задачи,
3) Замена строгих неравенств нестрогими оценками,
4) Приемы решения уравнений в целых числах,
5) Признаки делимости и их применение. Признак делимости на 11
6) Применение Основной теоремы арифметики,
7) Сравнение с суммой арифметической прогрессии,
8) Выделение целой части,
9) Приемы работы с неравенствами,
10) «Умный перебор» вариантов,
11) Приемы решения задач с числами на круге.
12) Использование остатков от деления

Умный перебор вариантов

8. (*Всеросс., 2015, МЭ, 7.1*) В тридевятом царстве есть только два вида монет: 16 и 27 тугриков. Можно ли заплатить за одну тетрадку ценой в 1 тугрик и получить сдачу?

9. (*САММАТ, 2021, 6.1*) Найти минимальное пятизначное число, все цифры которого различны и при делении которого на 91 в остатке имеем 4.

Использование делимости

10. (*«Ломоносов», 2017, 9.1*) На доске было написано 21 последовательное натуральное число. Когда одно из чисел стёрли, сумма оставшихся стала равна 2017. Какое число стёрли?

Уравнения в целых числах и выделение целой части

11. Решите в целых числах уравнение $xy = x + y + 3$.

Эту модельную задачу решаем двумя способами.

1. Группируем и раскладываем на множители, произведение которых есть целое число.
2. Выражаем y через x и в полученной дроби выделяем целую часть.

12. («Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.5, 7–8.3, 9.2) Коля решил проверить свое знание четырех арифметических действий. Он взял два натуральных числа и нашел их сумму. Потом нашел разность этих чисел — первое число минус второе. Потом нашел произведение этих же чисел. Потом частное от деления первого числа на второе. Сложив все 4 полученных результата Коля получил 153. Найдите два числа, над которыми производились действия.

Работа с неравенствами. Замена строгих неравенств на нестрогие оценки.

13. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 7–8.1) Сумма 8 различных натуральных чисел равна 96, причем известно, что наименьшее из этих чисел составляет не менее половины от наибольшего из них. Найдите эти числа, в ответе запишите 4 наименьших из этих чисел, упорядоченные по возрастанию, без пробелов. Т. е., например, если это числа 14, 2, 58 и 6, то в ответе следует указать 261458.

5) Используем методы решения в задачах №19 ЕГЭ

Метод «Оценка плюс пример»

14. На доске написаны 3 различных натуральных числа. К каждому из них приписали справа одну и ту же цифру, при этом сумма чисел увеличилась в m раз.

а) Может ли m быть равно 13?

б) Может ли m быть равно 16?

в) Найдите наибольшее возможное натуральное m.

15. Вася перемножил несколько различных натуральных чисел из отрезка [23; 84]. Петя увеличил каждое из Васиных чисел на 1 и перемножил все полученные числа.
а) Может ли Петин результат быть ровно вдвое больше Васиного?
б) Может ли Петин результат быть ровно в 6 раз больше Васиного?
в) В какое наибольшее целое число раз Петин результат может быть больше Васиного?

«Заготовка» для всех пунктов задачи

16. Красный карандаш стоит 17 рублей, синий — 13 рублей. Нужно купить карандаши, имея всего 495 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше чем на пять.

а) Можно ли купить при таких условиях 32 карандаша?

б) Можно ли купить при таких условиях 35 карандашей?

в) Какое наибольшее число карандашей можно купить при таких условиях?

Замена строгих неравенств нестрогими оценками,

17. На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 40 и меньше 100.

а) Может ли на доске быть 5 чисел?

б) Может ли на доске быть 6 чисел?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

Выделение целой части

18. На доске было написано 20 натуральных чисел (не обязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Вместо некоторых из чисел (возможно, одного) на доске написали числа, меньшие первоначальных на единицу. Числа, которые после этого оказались равными 0, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел на доске увеличилось?

б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным 34?

в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

Признак делимости на 11

19. Будем называть четырёхзначное число очень счастливым, если все цифры в его десятичной записи различны, а сумма первых двух из этих цифр равна сумме последних двух из них. Например, очень счастливым является число 3140.

а) Существуют ли десять последовательных четырёхзначных чисел, среди которых есть два очень счастливых?

б) Может ли разность двух очень счастливых четырёхзначных чисел равняться 2015?

в) Найдите наименьшее натуральное число, для которого не существует кратного ему очень счастливого четырёхзначного числа.

Использование остатков

20. На доске написано N различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 33. Для каждых двух написанных чисел a и b таких, что $a < b$, ни одно из написанных чисел не делится на $b - a$ и ни одно из написанных чисел не является делителем числа $b - a$.

а) Могли ли на доске быть написаны числа 11, 12, 13?

б) Среди написанных на доске чисел есть число 15. Может ли N быть равным 18?

в) Найдите наибольшее значение N.

Сравнение с суммой арифметической прогрессии

21. На доске написаны числа 1, 2, 3, ...30. За один ход разрешается стереть произвольные три числа, сумма которых меньше 35 и отлична от каждой из сумм троек чисел, стёртых на предыдущих ходах.

а) Приведите пример последовательности 5 ходов.

б) Можно ли сделать 10 ходов?

в) Какое наибольшее число ходов можно сделать?

Пример задачи на числа на круге

22. На окружности некоторым образом расставили натуральные числа от 1 до 21 (каждое число поставлено по одному разу). Затем для каждой пары соседних чисел нашли разность большего и меньшего.

а) Могли ли все полученные разности быть не меньше 11?

б) Могли ли все полученные разности быть не меньше 10?

в) Помимо полученных разностей, для каждой пары чисел, стоящих через одно, нашли разность большего и меньшего. Для какого наибольшего целого числа k можно так расставить числа, чтобы все разности были не меньше k?

Работа с неравенствами

23. Известно, что a, b, c и d — попарно различные двузначные натуральные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d} = \frac{7}{19}$?

б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$

если $a > 3b$ и $c > 6d$?

6) Задачи 19 повышенной сложности

24. Для действительного числа x обозначим через $[x]$ наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, $\left[\frac{11}{4}\right] = 2$, так как $2 \leq \frac{11}{4} < 3$.

а) Существует ли такое натуральное число n, что $\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + \left[\frac{n}{7}\right] = n$?

б) Существует ли такое натуральное число n, что $\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] = n + 2$?

в) Сколько существует различных натуральных n, для которых

$$\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{9}\right] + \left[\frac{n}{17}\right] = n + 1945?$$

25. Даны два набора чисел: в первом наборе каждое число равно 150, а во втором – каждое число равно 50. Среднее арифметическое всех чисел двух наборов равно 78.

а) Каждое число первого набора уменьшили на натуральное число n. Может ли среднее арифметическое всех чисел двух наборов быть равно 71?

б) Каждое число первого набора уменьшили на натуральное число m. Может ли среднее арифметическое всех чисел двух наборов быть равно 70?

в) Каждое число одного набора увеличили на натуральное число k, одновременно уменьшив на k каждое число другого набора, при условии, что все числа остались положительными. Какие целые значения может принимать среднее арифметическое всех чисел двух наборов?

26. На острове живут 3 серых, 28 бурых и 29 малиновых хамелеонов. При встрече двух хамелеонов разных цветов оба меняют свой цвет на третий (серый и бурый оба становятся малиновыми и т. п.).

а) Может ли в некоторый момент времени на острове оказаться 15 серых, 28 бурых и 17 малиновых хамелеонов?

б) Может ли некоторый момент времени на острове оказаться 60 серых хамелеонов?

в) Какое наибольшее количество серых хамелеонов может оказаться на острове, при условии, что малиновых хамелеонов в этот момент времени ровно 2?

27. (*МИОО, 2016*) Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1,\ a_2, \ldots, a_n, \ldots$ состоит из различных натуральных чисел. Пусть $S_1 = a_1$, $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ при всех натуральных $n \geq 2$.

а) Существует ли такая прогрессия, для которой $S_{10} = 100S_1$?

б) Существует ли такая прогрессия, для которой $S_{10} = 50S_2$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{S_5^2}{S_1 S_{10}}$?

28. (*МИОО, 2017*) Конечная последовательность $a_1,\ a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k - 2$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 6$, в которой $a_6 = 6$.

б) Может ли в такой последовательности некоторое натуральное число встретиться три раза?

в) При каком наибольшем *n* такая последовательность может состоять только из чётных двузначных чисел?

29. (*ЕГЭ, 2016*) Последовательность $a_1,\ a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 3)$ состоит из натуральных чисел, причём каждый член последовательности (кроме первого и последнего) больше среднего арифметического соседних (стоящих рядом с ним) членов.

а) Приведите пример такой последовательности, состоящей из четырёх членов, сумма которых равна 50.

б) Может ли такая последовательность состоять из шести членов и содержать два одинаковых числа?

в) Какое наименьшее значение может принимать сумма членов такой последовательности при $n = 10$?

30. (*ЕГЭ, 2016*) В шахматы можно играть, проиграть или сыграть вничью. Шахматист записывает результат каждой сыгранной им партии и после каждой партии подсчитывает три показателя: «победы» - процент побед, округлённый до целого, «ничья» - процент ничьих, округлённый до целого, и «поражения», равные разности 100 и суммы показателей «побед» и «ничьих». (Например, число 13,2 округляется до 13, число 14,5 округляется до 15, число 16,8 округляется до 17.)

а) Может ли в какой-то момент показатель «побед» равняться 17, если было сыграно менее 50 партий?

б) Может ли после выигранной партии увеличится показатель «поражений»?

в) Одна из партий была проиграна. При каком наименьшем количестве сыгранных партий показатель «поражений» может быть равным 1?