

## Задачи варианта №6

### Часть 1. Задания с кратким ответом

1. В прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом  $C$  вписана окружность, которая касается гипотенузы в точке  $E$ . Известно, что  $AE=7$ ,  $BE = 4$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

2. Даны векторы  $\vec{a} = (1; 2)$ ,  $\vec{b} = (-3; 6)$  и  $\vec{c} = (4; -2)$ . Найдите длину вектора  $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ .

3. Анна Малкова

В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  сумма квадратов сторон треугольника  $ACD_1$  равна 32. Найдите длину диагонали  $B_1 D$ .

4. Преподаватель пригласил на собеседование трех из отстающих студентов через старосту группы. Староста забыл фамилии приглашенных и направил случайно трех из шести отстающих. Какова вероятность того, что это были нужные преподавателю студенты?

5. Доля спама\* в российском e-mail трафике составляет 75%. Почтовая программа распознает и отсеивает 95% этих писем. Однако по ошибке отсеивается также 1% нужной корреспонденции. Все остальные письма попадают в папку «Входящие».

Письмо оказалось в папке «Входящие». С какой вероятностью это не спам? Результат округлите до сотых.

\* - Спам - массовая рассылка корреспонденции рекламного характера лицам, не выразившим желания её получить.

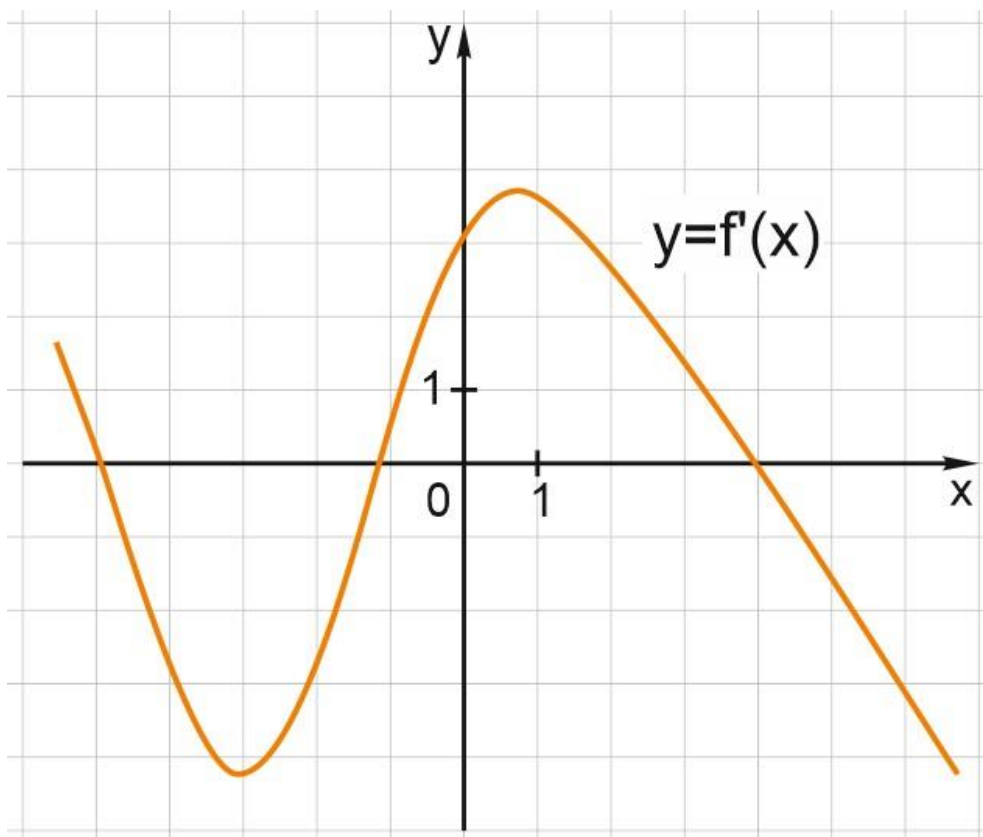
6. Анна Малкова

Решите уравнение:  $2^{\sin 2\pi x} = \frac{1}{2}$ .

В ответе запишите наименьший положительный корень.

7. Найдите значение выражения:  $\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

8. На рисунке изображен график  $y = f'(x)$  - производной функции  $y = f(x)$ . Сколько точек экстремума функции  $y = f(x)$  расположено на отрезке  $[-4; 2]$ ?



9. В электрическом обогревателе с неизменным сопротивлением  $R$  нагревательного элемента, через который течёт постоянный ток, за время  $t$  выделяется количество теплоты  $Q = I^2 R t$ . Во сколько раз увеличится количество выделяемой теплоты, если силу тока  $I$  и время работы обогревателя  $t$  увеличить вдвое?

10. *Анна Малкова*

Задумав разбогатеть, Валентина Петровна открыла интернет-магазин сувениров, в котором продаются изделия двух типов: зайки и чебурашки.

В декабре было продано в 10 раз больше зайек, чем чебурашек, а чебурашка стоил в 4 раза дороже, чем зайка.

В ночь на 1 января Валентина Петровна подняла цену на чебурашек на 20%.

Несмотря на это, в январе было продано в 10 раз больше чебурашек, чем зайек.

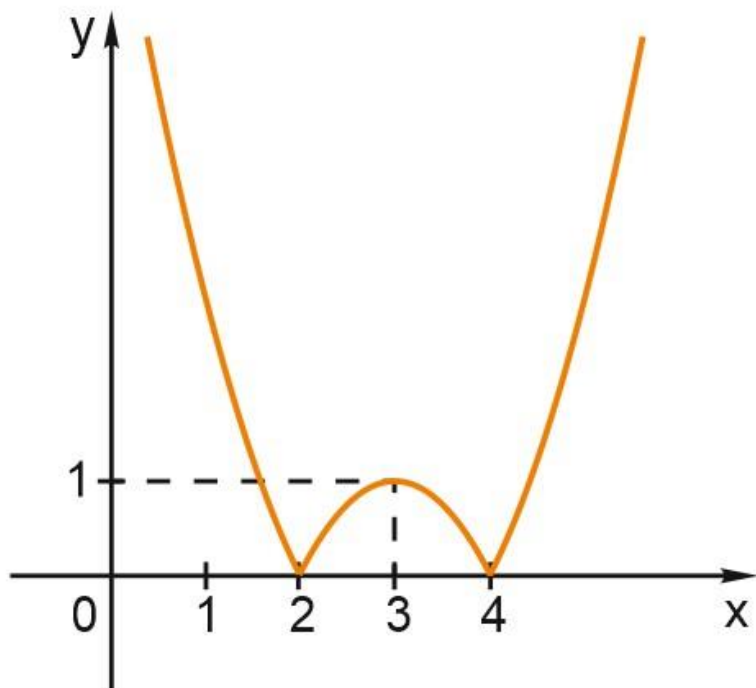
А зайек в январе было продано на 80% меньше, чем в декабре.

Во сколько раз выросла выручка Валентины Петровны в январе по сравнению с декабрем?

11. Анна Малкова

На рисунке изображен график функции  $y = |ax^2 + bx + c|$ .

Найдите  $c$ , если известно, что  $c > 0$ .



12. Найдите наименьшее значение функции  $y = (x + 31)^2 e^{-31-x}$  на отрезке  $[-34; -30]$ .

### Часть 2. Задания с развернутым ответом

13. Дано уравнение  $|\sin x| = \cos x$ .

а) Решите уравнение.

б) Найдите все корни уравнения на интервале  $[0; 2\pi]$ .

14. Дана правильная четырёхугольная пирамида  $SABCD$ . Точка  $M$  – середина  $SA$ , на ребре  $SB$  отмечена точка  $N$  так, что  $SN : NB = 1 : 2$ .

а) Докажите, что плоскость  $CMN$  параллельна прямой  $SD$ .

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью  $CMN$ , если все рёбра равны 12.

15. Анна Малкова

Решите неравенство:  $\frac{\log_3(7x-12)}{\log_3(x-3)} \geq \log_{15-x}|x-15|$ .

16. В июле 2022 года планируется взять кредит на 600 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- в январе 2023, 2024 и 2025 годов долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года:

- в январе 2026, 2027 и 2028 годов долг возрастает на  $r\%$  по сравнению с концом предыдущего года;

- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года:

- к июлю 2028 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равно  $r$ , если общая сумма выплат составит 984 тыс. рублей?

17. Остроугольный треугольник  $ABC$ , в котором  $AB < BC$ , вписан в окружность с центром  $O$ . Высота  $BH$  треугольника  $ABC$  пересекает описанную окружность в точке  $D$ ,  $AH : DH = 3 : 4$ .

а) Докажите, что медианы  $NK$  и  $OM$  треугольников  $ADH$  и  $OBC$  равны.

б) Пусть  $BC:AD = 3:2$ . Найдите тангенс угла  $BAC$ .

18. При каких неотрицательных значениях  $a$  функция  $f(x) = 3ax^4 - 8x^3 + 3x^2 - 7$  на отрезке  $[-1; 1]$  имеет ровно одну точку минимума?

19. Дано квадратное уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$ , где  $a, b$  и  $c$  — натуральные числа, не превосходящие 100. Также известно, что числа  $a, b$  и  $c$  попарно отличаются друг от друга не менее, чем на 2.

а) Может ли такое уравнение иметь корень  $-7$ ?

б) Может ли такое уравнение иметь корень  $-53$ ?

в) Какой наименьший целый корень может иметь такое уравнение?