

Задачи варианта №7

Часть 1. Задания с кратким ответом

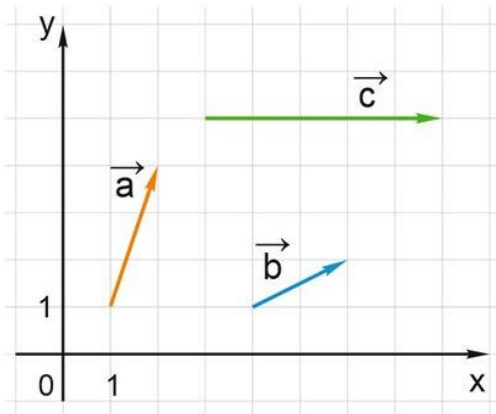
1. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD и $AB = AD = CD$.

Найдите больший угол треугольника ABC. Ответ дайте в градусах.

2. На координатной плоскости изображены векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} . Вектор \vec{c} разложен по двум неколлинеарным векторам \vec{a} и \vec{b} :

$$\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b},$$

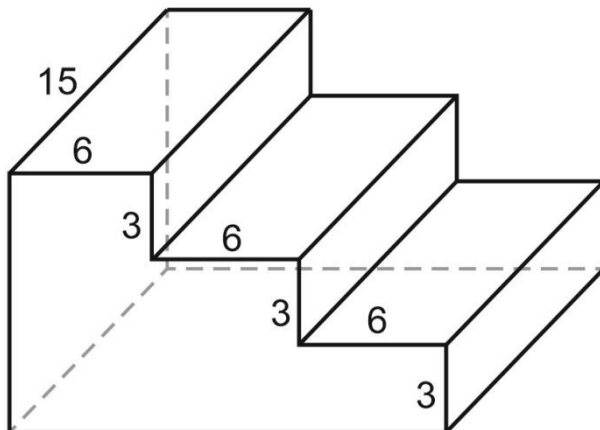
где k и l коэффициенты разложения. Найдите k .



3. *Ольга Чемезова*

Найдите площадь поверхности «лесенки», изображенной на рисунке.

Считайте, что все двугранные углы прямые.



4. Анна Малкова

Магазин фермерских товаров закупает мёд в одинаковых банках у двух пчеловодов – Антона и Бориса, причем 65% мёда, который поставляет Антон, - это липовый мёд. У Бориса липовый мёд составляет 20% всего мёда, который он привозит в магазин. Известно, что 56% мёда, который продает магазин, - это липовый мёд. Найдите вероятность того, что случайно выбранная в магазине банка мёда произведена Борисом.

5. В таблице показано количество билетов и возможные выигрыши беспроигрышной денежной лотереи. Цена билета лотереи равна 50 рублей. Всего билетов выпущено 1000 штук. Участник покупает один случайный билет. На сколько рублей цена билета выше, чем математическое ожидание выигрыша?

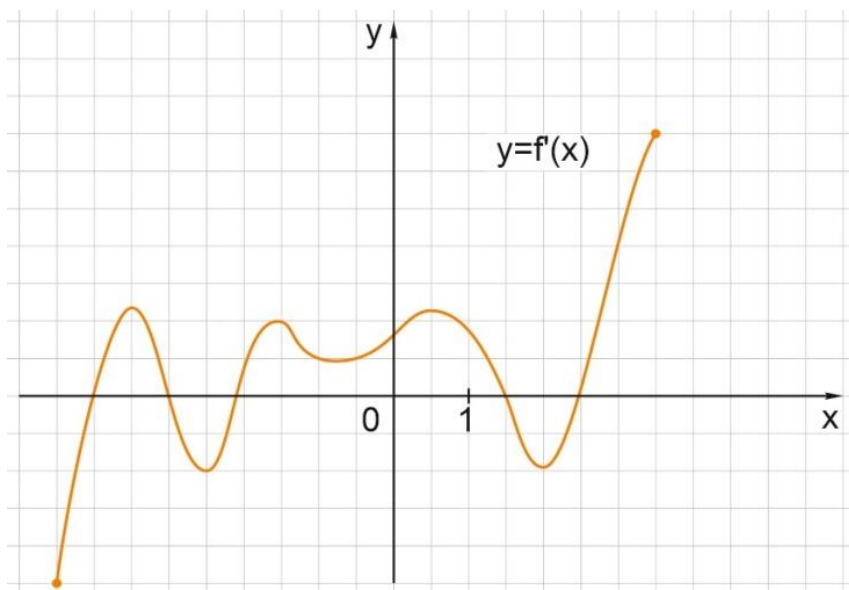
Выигрыш	10	50	100	5000
Количество билетов	990	6	3	1

6. Решите уравнение: $\cos\sqrt{49 - x^2} = 1$.

В ответе запишите количество корней уравнения.

7. Вычислить: $\frac{\log_7 77 - \log_7 11}{7^{\log_7 4}}$.

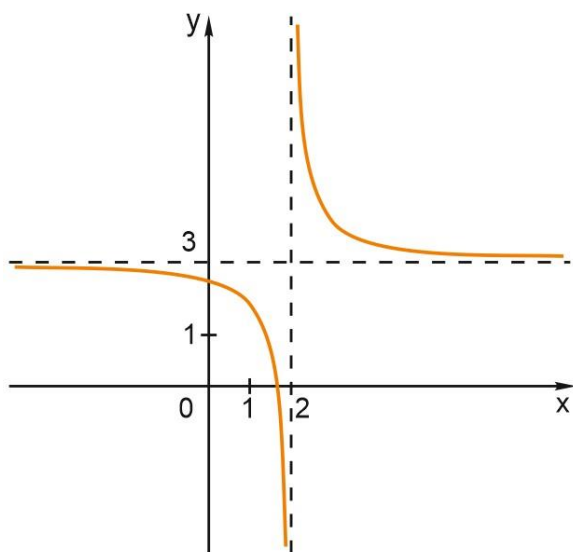
8. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $y = f(x)$, определенной на отрезке $[-4,5; 3,5]$. Сколько точек минимума имеет функция $y = f(x)$ на этом отрезке?



9. Если достаточно быстро вращать ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведёрка сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет положительной во всех точках траектории, кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна $P = m\left(\frac{v^2}{L} - g\right)$, где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведёрка в м/с, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10 \text{ м/с}^2$). С какой наименьшей скоростью надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна 44,1 см? Ответ выразите в м/с.

10. От пристани N одновременно отправились вниз по течению плот и катер. Катер прошел вниз по течению 96 км, затем повернул обратно и вернулся в N через 14 часов. Найдите скорость катера в стоячей воде, если известно, что катер встретил плот на обратном пути на расстоянии 24 км от N. Ответ выразите в км/ч.

11. На рисунке изображен график функции $f(x) = \frac{1}{x-a} + b$. Найдите $f(12)$.



12. Найдите точку минимума функции $y = 4x - \ln(x + 8) + 12$.

Часть 2. Задания с развернутым ответом

13.

а) Решите уравнение: $\sin x - \cos x = 4 \sin x \cos^2 x$

б) Найдите все корни уравнения на отрезке $[-\pi; 0]$.

14. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на диагонали BD_1 отмечена точка N так, что $BN:ND_1 = 1 : 2$. Точка O — середина отрезка CB_1 .

а) Докажите, что прямая NO проходит через точку A .

б) Найдите объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если длина отрезка NO равна расстоянию между прямыми BD_1 и CB_1 и равна $\sqrt{2}$.

15. Решите неравенство:
$$\frac{\log_{0,5}(8x^2+24x-16)+\log_2(x^4+6x^3+9x^2)}{x^2+3x-10} \geq 0.$$

16. *Анна Малкова*

По бизнес-плану предполагается изначально вложить в четырёхлетний проект 10 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 15% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по целому числу n млн рублей в первый и второй годы, а также по целому числу m млн рублей в третий и четвёртый годы.

Найдите наименьшие значения n и m , при которых первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, а за четыре года как минимум утроятся.

В ответе запишите найденные значения m и n через точку с запятой ; без пробелов.

17. Окружность с центром O , вписанная в треугольник ABC , касается его сторон BC , AB и AC в точках K , L , M соответственно. Прямая KM вторично пересекает в точке P окружность радиуса AM с центром A .

а) Докажите, что прямая AP параллельна прямой BC .

б) Пусть угол ABC прямой, $AM = 3$, $CM = 2$, Q — точка пересечения прямых KM и AB , а T — такая точка на отрезке PQ , что угол OAT равен 45° . Найдите QT .

18. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство

$$\log_{\frac{x^2+a^2}{2}} a \geq 1$$

имеет хотя бы одно решение.

19. Три числа назовем хорошей тройкой, если они могут быть длинами сторон треугольника.

Три числа назовем отличной тройкой, если они могут быть длинами сторон прямоугольного треугольника.

а) Даны 8 различных натуральных чисел. Может ли оказаться, что среди них не найдется ни одной хорошей тройки?

б) Даны 4 различных натуральных числа. Может ли оказаться, что среди них можно найти три отличных тройки?

в) Даны 12 различных чисел (необязательно натуральных). Какое наибольшее количество отличных троек могло оказаться среди них?