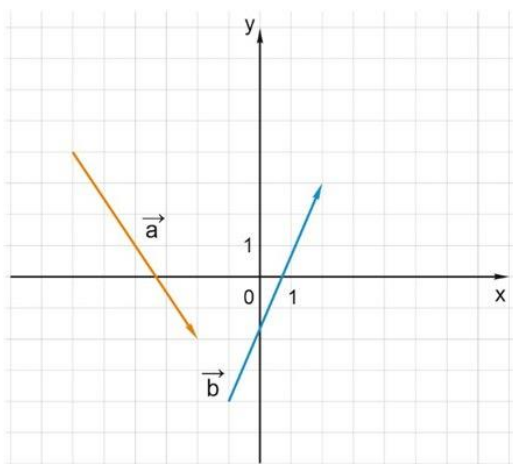


Задачи варианта №8

Часть 1. Задания с кратким ответом

1. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC через точку E пересечения диагоналей проведен отрезок PQ , параллельный основаниям трапеции. Известно, что угол ABC равен 120° , угол CBE равен 30° . Найдите PQ , если $BC = 30$.

2. На координатной плоскости изображены векторы \vec{a} и \vec{b} . Найдите скалярное произведение векторов $2\vec{a}$ и \vec{b} .



3. *Анна Малкова*

Задумав разбогатеть, Валентина Петровна завела кур и петуха. И снесла одна курочка яичко, не простое, золотое, в форме сплошного шара диаметром 6 см.

Договорившись со знакомым ювелиром, Валентина Петровна собирается переплавить золотое яичко на украшения-медальоны в форме круглых монеток радиусом 1,5 см и толщиной 2,5 мм каждая. Сколько золотых медальонов получится у Валентины Петровны, если ей удастся реализовать свой план?

4. *Анна Малкова*

При броске двух игральных кубиков на них выпало одинаковое количество очков. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков больше 7.

5. *Анна Малкова*

Найдите вероятность того, что при броске трех игральных кубиков только на двух из них количество очков будет одинаковым (а на третьем – другое, например, 414). Ответ округлите до сотых.

6. Анна Малкова

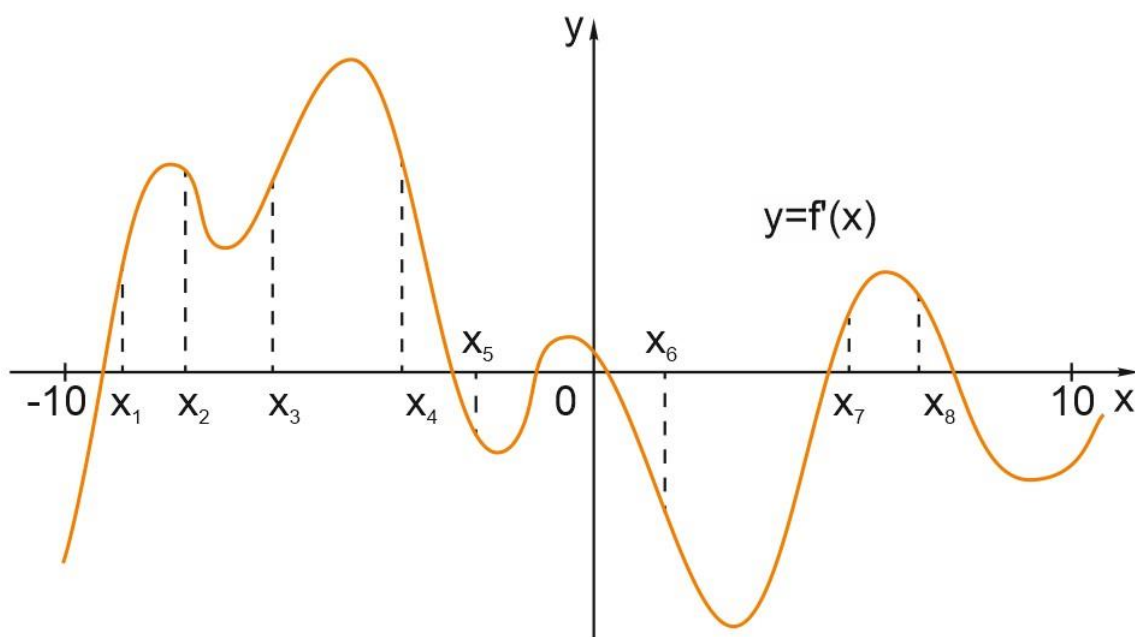
Решите уравнение: $\log_7(x^3 - 64x + 49) = 2$.

Если уравнение имеет несколько корней, в ответе запишите меньший из них.

7. Найдите значение выражения: $\frac{\cos 10^\circ \cdot \cos 6^\circ - \sin 10^\circ \cdot \sin 6^\circ}{\cos 53^\circ \cdot \cos 37^\circ}$.

8. Анна Малкова

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ - производной функции $y = f(x)$. На ее графике отмечены 8 точек. В скольких из них функция $y = f(x)$ монотонно убывает? В ответе запишите количество таких точек.

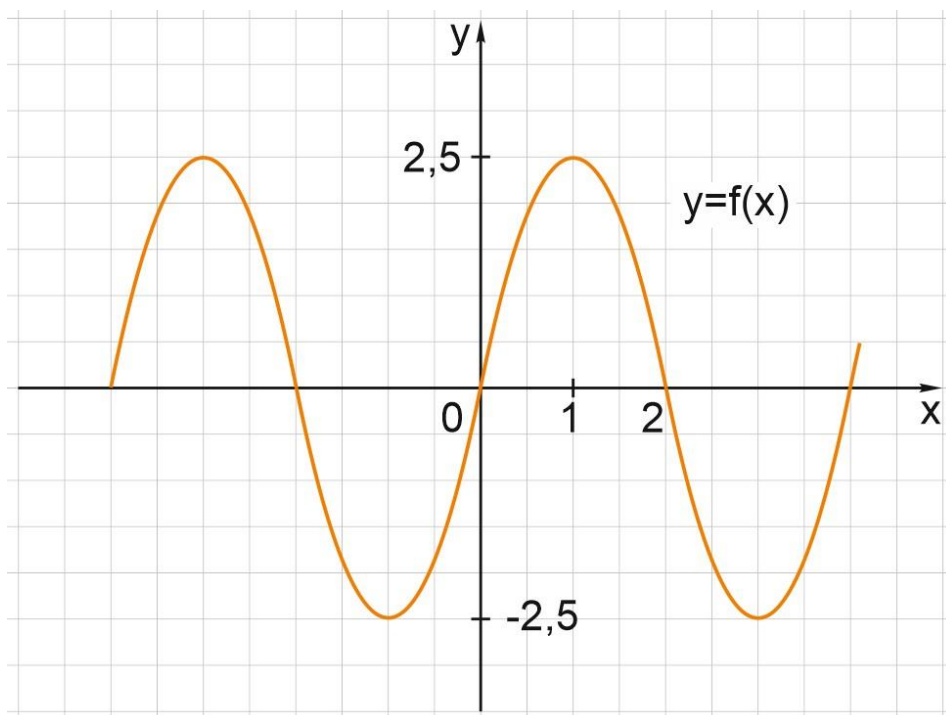


9. Некоторая компания продаёт свою продукцию по цене $p = 400$ руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 200$ руб., постоянные расходы предприятия $f = 600\,000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $g(q) = q(p - v) - f$. Определите месячный объём производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет равна $900\,000$ руб.

10. Каждая сторона основания пирамиды была уменьшена на 20%. На сколько процентов необходимо увеличить высоту пирамиды, чтобы ее объём остался неизменным?

11. Анна Малкова

На рисунке изображен график функции $f(x) = A\cos(b(x + c))$. Найдите c .



12. Найдите наибольшее значение функции $y = 15x - 3 \sin x + 5$ на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; 0]$.

Часть 2. Задания с развернутым ответом

13.

а) Решите уравнение $(2\sin x + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{\cos x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$.

14. Анна Малкова

В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$, такая, что $AB = BC = CD = a$,

$AD = 2a$, вершина S проецируется в середину отрезка AD . Высота пирамиды равна $SO = 2\sqrt{2}a$. Сечение пирамиды проходит через прямую BC и точку M – середину ребра AS .

а) Докажите, что диагонали сечения равны.

б) Найдите угол между прямыми BM и SD .

15. Анна Малкова

Решите неравенство: $\sqrt{\frac{\sqrt{x^2-6x+5}}{x-7}} \cdot (\log_9(x-1)^2 - 2) \geq 0$.

16. 15-го декабря планируется взять кредит в банке на сумму 300 тысяч рублей на 21 месяц. Условия возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа 20-го месяца долг составит 100 тысяч рублей;
- к 15-му числу 21-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

17. Дана трапеция ABCD с основаниями BC и AD. Окружность ω радиуса 2, центр O которой лежит на диагонали BD, касается отрезков BC, CD и AD в точках M, N, K соответственно. Известно, что $BM=3$, а четырехугольник OBAK вписан в окружность.

- а) Докажите, что $CO \parallel AB$
- б) Найдите площадь трапеции ABCD

18. При каких значениях параметра a уравнение $x^3 + ax^2 + 13x - 6 = 0$ имеет единственное решение?

19. Последовательность $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ состоит из натуральных чисел, причём $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ при всех натуральных n .

а) Может ли выполняться равенство $5a_5 = 9a_4$?

б) Может ли выполняться равенство $5a_5 = 7a_4$?

в) При каком наименьшем натуральном n может выполняться равенство

$$3n \cdot a_{n+1} = (n^2 - 1) \cdot a_n.$$