Тренировочная №3 (11 февраля), 11 вариант

Часть 2.

13.

а) Решите уравнение $25^{-\sqrt{1-\cos^2 x}} - 25^{\sin x} = -\frac{24}{5}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение:

$$\sqrt{1-\cos^2 x} = |\sin x|.$$

$$25^{-|\sin x|} - 25^{\sin x} = -\frac{24}{5}$$

1) $\sin x = 0$, тогда

$$25^{\circ} - 25^{\circ} = 1 - 1 = 0 \neq -\frac{24}{5}$$

2) $\sin x < 0$, тогда

$$25^{\sin x} - 25^{\sin x} = 0 \neq -\frac{24}{5}$$

нет решений

3) $\sin x > 0$, тогда

$$25^{\sin x} - 25^{-\sin x} = \frac{24}{5},$$

замена: $25^{\sin x} = t, t > 0$,

$t - \frac{1}{t} = \frac{24}{5}$; $t^2 - \frac{24}{5}t - 1 = 0$;

$$5t^2 - 24t - 5 = 0;$$

$$D = 576 + 100 = 676;$$

$$\sqrt{D} = 26,$$

$$t = \frac{24 \pm 26}{10};$$

$t_1 = 5$; $t_2 < 0$ – не подходит, т.к. $t > 0$.

$$25^{\sin x} = 5;$$

$25^{\sin x} = 25^{\frac{1}{2}}$; $\sin x = \frac{1}{2}$, при этом $\sin x > 0$.

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in z$ или

$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,$

б) С помощью двойного неравенства отберем корни.

Получим:

$x = -2\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{11\pi}{6}$.

14. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 7, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{7}$. На рёбрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $BK = C_1L = 3$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L.

А) Докажите, что прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ.

Б) Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка A, а основание – сечение данной призмы плоскостью γ.

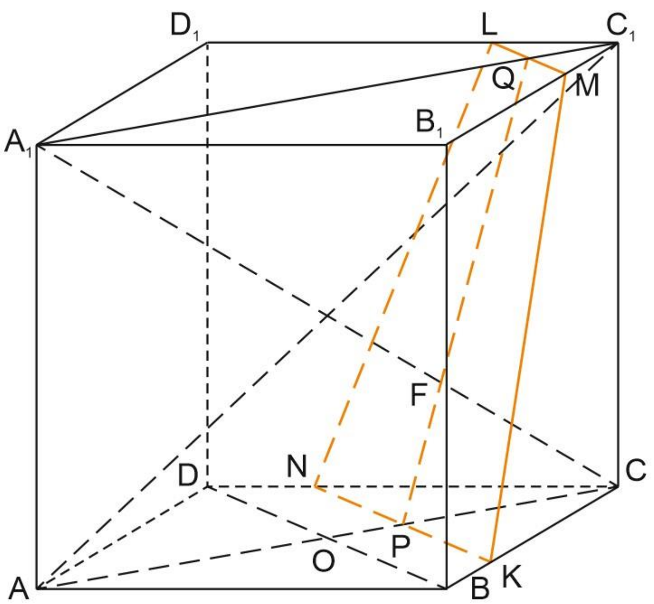
Решение:

Проведем $KN||BD$,

$\Delta CKN \sim \Delta CBD$ по двум углам

$$\frac{CK}{BC} = \frac{CN}{CD} = \frac{4}{7};$$

$$CK = CN = 4;$$



Проведём $LM||B_1D_1$;

$\frac{C_1M}{C_1B_1} = \frac{C_1L}{C_1D_1} = \frac{3}{7}$;

$$C_1M = C_1L = 3;$$

$LM||NK$ как линии пересечения параллельных плоскостей третьей плоскостью сечения – трапеция $KMLN$.

$$AC \perp BD \Rightarrow AC \perp NK$$

Тогда $A_1C \perp NK$, по теореме о трех перпендикулярах.

Пусть $A_1C \cap (KLM) = F$

$$AC \cap KN = P,$$

$$A_1C_1 \cap LM = Q,$$

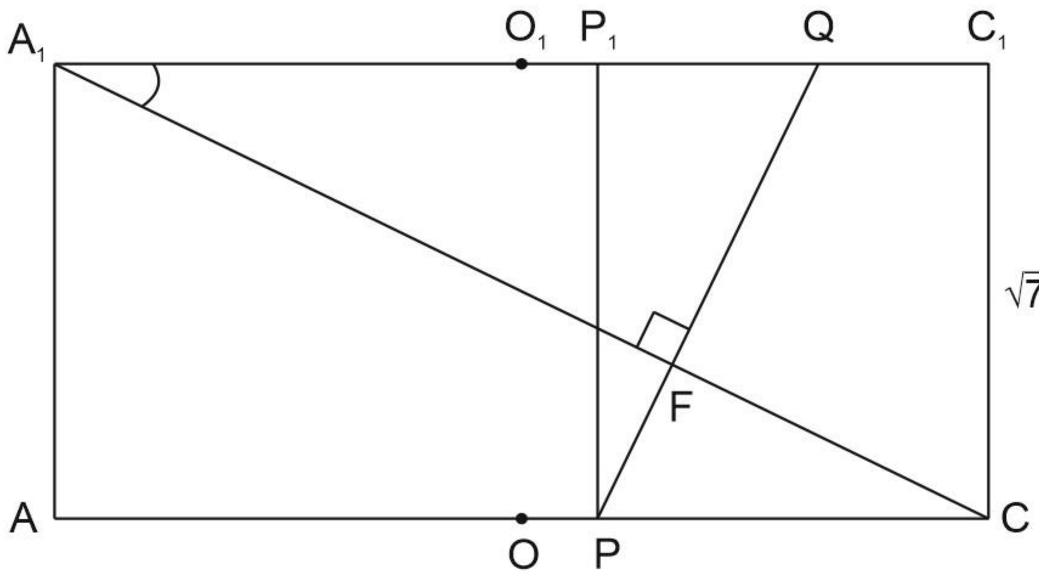
$$AC \cap BD = O,$$

$$A_1C_1 \cap B_1D_1 = O_1,$$

$\Delta CPK \sim \Delta COB$ по 2 углам, $\Rightarrow$

$CP = \frac{4}{7}CO$, аналогично, $C_1Q = \frac{3}{7}C_1O_1$.

$$A_1C_1 = AC = 7\sqrt{2}$$



Докажем, что $QP \perp A_1C$.

Рассмотрим ΔA_1FQ;

$$tg\angle CA_1C_1 = tg\angle FA_1Q = \frac{\sqrt{7}}{7\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

Проведем $PP_1||CC_1$

Из ΔPP_1Q:

$$P_1Q = \frac{7\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{7} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$tg\angle P_1QP = tg\angle A_1QF = \frac{\sqrt{7}\cdot 2}{\sqrt{2}} = \sqrt{14};$

$$tg\angle A_1QF = \frac{1}{tg\angle QA_1F} = ctg\angle QA_1F = tg\left(\frac{\pi}{2} - \angle QA_1F\right)$$

Так как углы A_1QF и QA_1F острые,

$$\angle A_1QF = \frac{\pi}{2} - \angle QA_1F;$$

$$\angle A_1QF + \angle QA_1F = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$A_1C \perp PQ$; по признакам перпендикулярности прямой и плоскости

$$A_1C \perp (KML).$$

б) Найдем V_{A_1KMLN}

так как $A_1C \perp (KML)$;

$$V_{A_1KMLN} = \frac{1}{3} S_{\Delta KMLN} \cdot A_1F,$$

A_1F – расстояние от A_1 до плоскости (KML):

Из ΔAA_1C: $A_1C = \sqrt{AA_1^2 + AC^2} = \sqrt{105};$

$\Delta AA_1C \sim \Delta FPC,$ отсюда

$FC = \frac{AC\cdot PC}{A_1C} = \frac{4\sqrt{105}}{15};$

$A_1F = \frac{11\sqrt{105}}{15};$

Из ΔPP_1Q:

$PQ = \frac{\sqrt{30}}{2};$

$NK = 4\sqrt{2}, LM = 3\sqrt{2},$

$V_{A_1KMLN} = \frac{77\sqrt{7}}{6}.$

15. Решите неравенство $\frac{\log_5(x+1)-\log_5(5-x)}{\log_5^2 x^2+3\log_5 x^4+9} \leq 0.$

Решение:

Упростим знаменатель:

$3\log_2 x^4 = 6\log_2 x^2;$

$$\log_5^2 x^2 + 6\log_5 x^2 + 9 = (\log_5 x^2 + 3)^2$$

$$\frac{\log_5(x+1) - \log_5(5-x)}{\left(\log_5 x^2 + 3\right)^2} \leq 0$$

ОДЗ:

$\begin{cases} x+1>0 \\ 5-x>0 \\ x\neq 0 \\ \log_5 x^2 \neq -3 \end{cases}; \begin{cases} -1<x<5 \\ x\neq 0 \\ x^2 \neq \frac{1}{125} \end{cases}$

Неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} -1<x<5 \\ x\neq 0 \\ x^2 \neq \dfrac{1}{125} \\ \log_5(x+1) - \log_5(5-x) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1<x<5 \\ x\neq 0 \\ x \neq \pm\dfrac{1}{5\sqrt{5}} \\ \log_5(x+1) \leq \log_5(5-x) \end{cases}$$

Функция $\mathrm{y} = \log_5 \mathrm{t}$ монотонно возрастает, поэтому, если

$\log_5 \mathrm{t}_1 \leq \log_5 \mathrm{t}_2$, то $\mathrm{t}_1 \leq \mathrm{t}_2$

при $\mathrm{t}_1 > 0, \mathrm{t}_2 > 0$

$\begin{cases} -1<x<5 \\ x\neq 0 \\ x \neq \pm\frac{1}{5\sqrt{5}} \\ x+1 \leq 5-x \end{cases}; \begin{cases} -1<x<5 \\ x\neq 0 \\ x \neq \pm\frac{1}{5\sqrt{5}} \\ x \leq 2 \end{cases};$

$$-1 < -\frac{1}{5\sqrt{5}} < 0$$

$$0 < \frac{1}{5\sqrt{5}} < 2$$

Ответ: $x \in \left(-1; -\frac{1}{5\sqrt{5}}\right) \cup \left(-\frac{1}{5\sqrt{5}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{5\sqrt{5}}\right) \cup \left(\frac{1}{5\sqrt{5}}; 2\right]$

16. В июле 2026 года планируется взять кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 16% по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

- в июле 2027, 2028 и 2029 годов долг остаётся равным первоначальному;

- выплаты в 2030 и 2031 годах равны;

- к июлю 2031 года долг должен быть выплачен полностью.

Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 9 млн рублей.

Решение:

Пусть S – сумма кредита, $k = 1{,}16$ повышающий коэффициент банка.

После 1, 2, 3 начисление процентов долг увеличивается в k раз и становится равен Sk;

После 1, 2 и 3 выплаты долг равен S. Значит, 1, 2 и 3 выплаты равны $S(k-1)$.

После 4 начисления процентов долг равен Sk,

После 4 выплаты уменьшается на x и равен $Sk - x$.

После 5 начисления процентов 5 выплаты сумма долга

$(Sk - x) \cdot k - x = 0$;

$Sk^2 - x(k+1) = 0$;

$x = \frac{Sk^2}{k+1}$;

Общая сумма выплат равна

$$B = 3S(k-1) + 2x = 3S(k-1) + 2 \cdot \frac{Sk^2}{k+1} < 9;$$

Расчеты в млн. рублей,

$$S\left(3(k-1)+\frac{2k^2}{k+1}\right)<9;$$

$$S\cdot\frac{3(k-1)(k+1)+2k^2}{k+1}<9$$

$$S\cdot\frac{5k^2-3}{k+1}<9$$

$$S\cdot\frac{5\cdot 1{,}16^2-3}{1{,}16+1}<9$$

$$S<\frac{9\cdot 2{,}16}{3{,}728}=\frac{9\cdot 2160}{3728}$$

$$S<\frac{9\cdot 540}{932};\ S<\frac{9\cdot 135}{233};$$

$$S<\frac{1215}{233};\ S<5\frac{50}{233};$$

$$S\le 5;$$

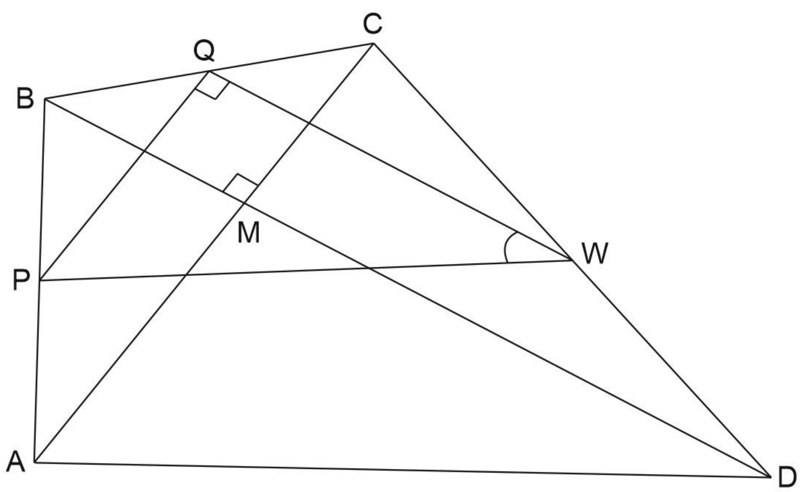
$S_{max}=5.$

17. Точки P,Q,W делят стороны выпуклого четырёхугольника $ABCD$ в отношении $AP:PB=CQ:QB=CW:WD=2:5$. В треугольнике PQW угол W острый, при этом радиус описанной около этого треугольника окружности равен $\frac{17}{4}$, $PQ=\frac{15}{2}$, $QW=4$.

а) Докажите, что треугольник PQW прямоугольный.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.

Решение:



$$R_{\Delta PQW} = \frac{17}{4}$$

$$PQ = \frac{15}{2}$$

$$QW = 4$$

а) Докажите, что ΔPQW - прямоугольный.

$$2R = \frac{PQ}{\sin \angle PWQ} = \frac{QW}{\sin \angle QPW} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \angle PWQ = \frac{PQ}{2R} = \frac{15}{17};$$

$$\sin \angle QPW = \frac{QW}{2R} = \frac{8}{17};$$

$$\sin^2 \angle PWQ + \sin^2 \angle QPW = \left(\frac{15}{17}\right)^2 + \left(\frac{8}{17}\right)^2 = 1$$

$$\angle PWQ \text{ острый} \Rightarrow \sin \angle QPW = cos\angle PWQ;$$

$$\angle PWQ + \angle QPW = 90^\circ \Rightarrow \angle PQW = 90^\circ.$$

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.

$\Delta ABC \sim \Delta PBQ$; $AB:PB = BC:BQ = 7:5$,

Тогда $AC = \frac{7}{5}PQ = \frac{21}{2}$.

Аналогично, $\Delta BCD \sim \Delta QCW$; $BC:QC = CD:CW = 7:2$,

$$BD = \frac{7}{2}QW = 14,$$

$PQ||AC,\ OW||BD;$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{147}{2} = 73{,}5$.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$|x + 2a + 8| + |x - 2a - 16| \leq 3|x| + 3|x - 4|$$

выполняется при всех значениях x.

Решение:

Замена: $x - 4 = z$, тогда $x = z + 4$.

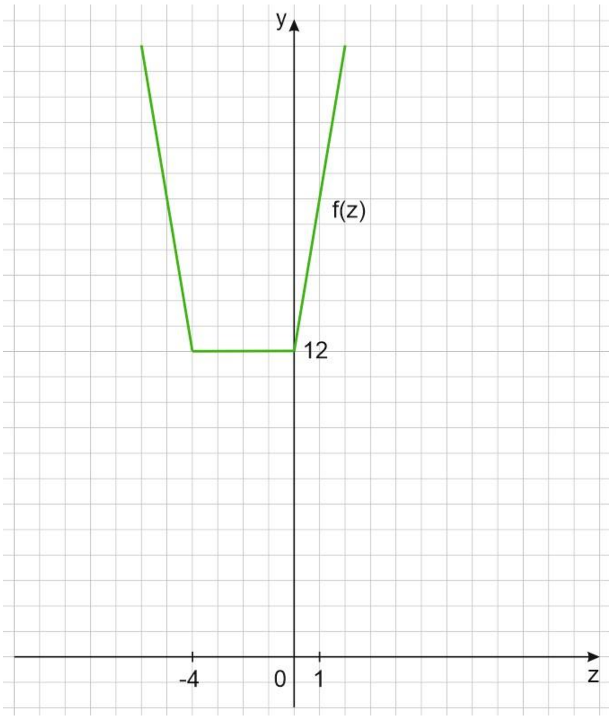
$$|z + 2a + 12| + |z - 2a - 12| \leq 3|z + 4| + 3|z|$$

Замена: $2a + 12 = b$;

$$|z + b| + |z - b| \leq 3(|z + 4| + |z|) \ (*)$$

Построим график функции

$$f(z) = 3(|z + 4| + |z|)$$



если $z \leq -4$, $f(z) = -6z - 12$

если $-4 < z < 0$, $f(z) = 12$

если $z \geq 0$, $f(z) = 6z + 12$

Построим график функции

$$g(z) = |z + b| + |z - b|)$$

Уравнение (*) четно относительно b; если b_0 – решение, то $-b_0$ тоже решение.

Если $b = 0$, то $g(z) = |z|$

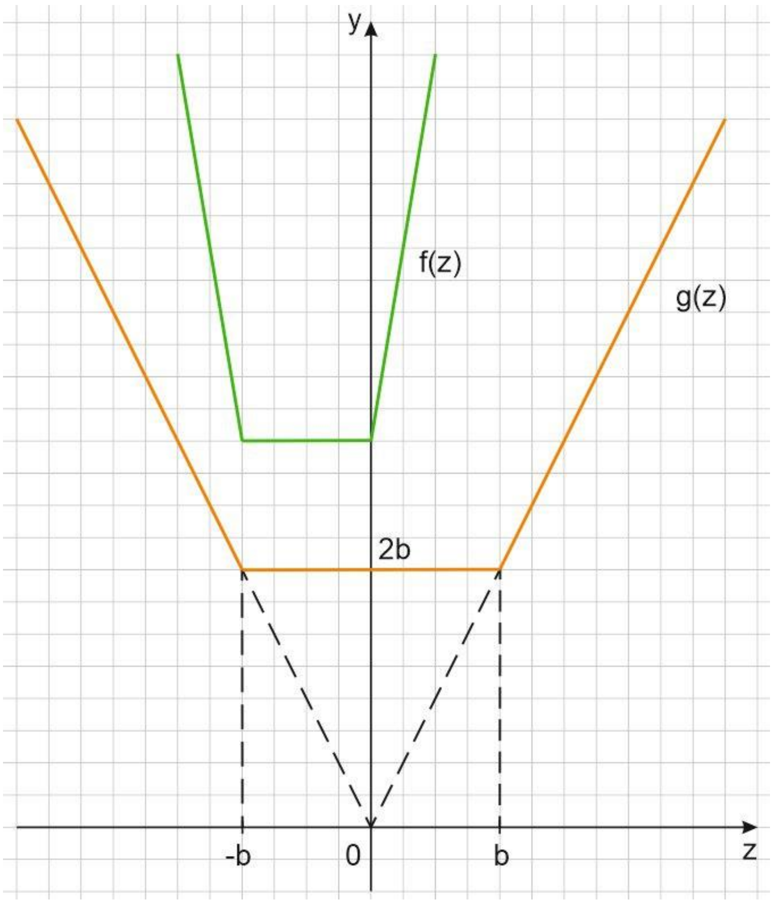
Если $b \geq 0$, то

при $z < -b$, $g(z) = -2z$,

при $-b \leq z \leq b$, $g(z) = 2b$,

при $z > b$, $g(z) = 2z$.

График функции $g(z)$ состоит из луча с угловым коэффициентом -2 с началом в точке $(-b;\ 2b)$; горизонтального участка $y = 2b$ и луча с угловым коэффициентом 2 и началом в точке $(b;\ 2b)$. Исходное неравенство выполняется при всех z, если график $g(z)$ лежит не выше графика $f(z)$ при всех z.



Наклонные участки графиков $f(z)$ и $g(z)$ не имеют общих точек. Неравенство выполнено, если горизонтальный участок функций $g(z)$ лежит не выше горизонтального участка $f(z)$, то есть $2b \leq 12$ при $b \geq 0$.

Так как уравнение (*) четно относительно b, получим:

$$2|b| \leq 12;$$

$$|b| \leq 6;$$

$-6 \leq b \leq 6$; $b = 2a + 12$;

$$-6 \leq 2a + 12 \leq 6;$$

$$-3 \leq a + 6 \leq 3;$$

$$-9 \leq a \leq -3.$$

Это ответ.

19.

На доске написано 10 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 4, а среднее арифметическое шести наибольших равно 12.

а) Может ли наименьшее из этих десяти чисел равняться 2?

б) Может ли среднее арифметическое всех десяти чисел равняться 9?

в) Найдите наибольшее значение среднего арифметического всех десяти чисел.

Решение:

10 чисел пусть

$$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots x_{10}$$

Перейдем от средних арифметических к суммам чисел.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 4 \cdot 6 = 24$$

$$x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 12 \cdot 6 = 72$$

а) Если $x_1 = 2$, то

$x_2 \geq 3, x_3 \geq 4, x_4 \geq 5, x_5 \geq 6, x_6 \geq 7$

Тогда $x_1 + x_2 + \cdots + x_6 \geq 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27 > 24$, противоречие;

нет, не может.

б) В этом случае сумма всех чисел равна $90 = 9 \cdot 10$.

Так как $x_5 + x_6 + \cdots + x_{10} = 72$,

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$, при этом

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24$, значит

$$x_5 + x_6 = 6.$$

Так как $x_5 < x_6$,

$x_5 \leq 2$.

Тогда $x_4 \leq 1, x_3 < 1$ – противоречие.

Нет, не может.

в) Обозначим сумму всех чисел S, найдем S_{max}, тогда наибольшее среднее арифметическое равно $\frac{S_{max}}{10}$.

Сумма первых 6 чисел

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24$;

Если $x_1 \geq 2$, то $x_2 \geq 3, x_3 \geq 4, x_4 \geq 5 \ldots$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27 > 24$; значит, $x_1 = 1$.

Если $x_2 \geq 3$, то

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 1 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 26 > 24$; значит, $x_2 = 2$.

Если $x_3 \geq 4$, то

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 1 + 2 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25 > 24$; значит, $x_3 = 3$.

Тогда $x_1 + x_2 + x_3 = 6$,

$x_4 + x_5 + x_6 = 24 - 6 = 18$,

$x_4 < x_5 < x_6$

Возможны варианты:

1) $x_4 = 5$; $x_5 = 6$; $x_6 = 7$;

2) $x_4 = 4$; $x_5 = 6$; $x_6 = 8$;

3) $x_4 = 4$; $x_5 = 5$; $x_6 = 9$;

Так как $x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 72$;

Выберем вариант с наибольшим возможным $x_4 = 5$.

Тогда сумма всех чисел равна $1 + 2 + 3 + 5 + 72 = 83$; наибольшее среднее арифметическое равно 8,3.

Приведем пример:

$1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10; 32$;

Тогда $\frac{1+2+3+5+6+7}{6} = 4$;

$\frac{6+7+8+9+10+32}{6} = 12$;

Среднее арифметическое всех чисел равно 8,3.