Стереометрия, задание 14. Классификация и методы решения.

Программа по стереометрии.

1. Плоскость в пространстве. Плоскость можно провести через…
2. Расположение плоскостей в пространстве. Если две плоскости имеют общую точку, то они…
3. Расположение прямых в пространстве. Три случая.
4. Параллельность прямой и плоскости. Определение. Признак.
5. Что такое наклонная и проекция наклонной. Рисунок.
6. Угол между прямой и плоскостью.
7. Перпендикулярность прямой и плоскости. Определение. Признак.
8. Скрещивающиеся прямые. Угол между скрещивающимися прямыми. Расстояние между скрещивающимися прямыми.
9. Расстояние от прямой до параллельной ей плоскости.
10. Угол между плоскостями.
11. Параллельность плоскостей. Определение и признак.
12. Перпендикулярность плоскостей. Определение и признак.
13. Линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью…
14. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями…
15. Теорема о трех перпендикулярах.
16. Площадь прямоугольной проекции фигуры.
17. Теорема о прямой и параллельной ей плоскости

Типы задач	Методы решения
Угол между прямыми	1) Находим угол между прямыми как угол треугольника (теорема косинусов). Пользуемся определением угла между скрещивающимися прямыми. 2) Возможно – применение теоремы о трех перпендикулярах 3) Векторно-координатный способ

Угол между прямой и плоскостью	1) По определению (как угол между прямой и ее проекцией на плоскость) 2) Векторно-координатный способ 3) В случае перпендикулярности прямой и плоскости – доказываем, что прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости
Угол между плоскостями	4) По определению (как угол между перпендикулярами, проведенными в этих плоскостях к линии их пересечения 5) С помощью формулы площади прямоугольной проекции фигуры 6) Векторно-координатный способ – как угол между нормалями к плоскостям
Расстояние от точки до плоскости	1) По определению (как длину перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость) 2) С помощью метода объемов 3) Координатный способ. Пользуемся формулой расстояния от точки до плоскости.
Расстояние между скрещивающимися прямыми	1) По определению (как длину их общего перпендикуляра) 2) Как расстояние между одной из этих прямых и параллельной ей плоскостью, в которой лежит другая прямая. 3) Как расстояние между параллельными плоскостями, в которых лежат эти прямые.
Нахождение радиуса сферы, вписанной в многогранник	1) Находим центр сферы как точку, равноудаленную от всех граней многогранника 2) Разбиваем многогранник на пирамиды с общей вершиной в центре вписанной сферы. Представляем объем многогранника как сумму объемов этих пирамид.

Полезные теоремы:

Если боковые **ребра** пирамиды равны, то ее вершина проецируется в центр описанной окружности основания.

Если боковые **ребра** пирамиды образуют одинаковые углы с плоскостью основания, то ее вершина проецируется в центр описанной окружности основания.

Если боковые **грани** пирамиды образуют одинаковые углы с плоскостью основания, то ее вершина проецируется в центр вписанной окружности основания.

Если две плоскости перпендикулярны третьей плоскости, то линия их пересечения также перпендикулярна третьей плоскости

Теорема о прямой и параллельной ей плоскости.

Пусть прямая m параллельна плоскости α. Если плоскость β проходит через прямую m и пересекает плоскость α по прямой c, то прямая c параллельна m.

Отношение **площадей** подобных фигур равно **квадрату** коэффициента подобия.

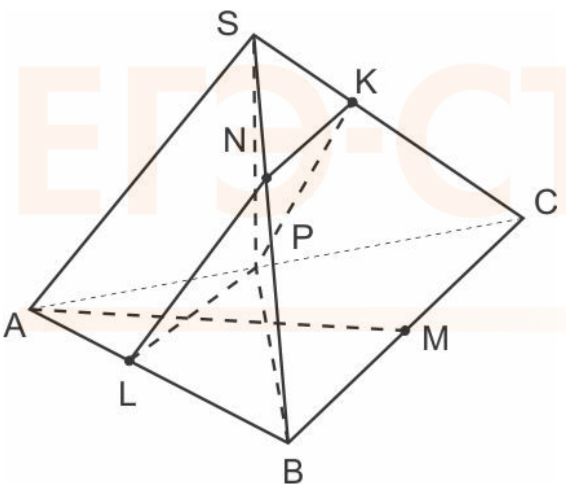
Отношение **объемов** подобных тел равно **кубу** коэффициента подобия.

1. В правильной треугольной пирамиде SABC точка K делит сторону SC в отношении 1:2, считая от вершины S, точка N делит сторону SB в отношении 1:2, считая от вершины S. Через точки N и K параллельно SA проведена плоскость Ω.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью Ω параллельно прямой BC.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости Ω, если известно, что $SA = 9,\ AB = 6$.

Решение:



а) Пусть Ω – плоскость сечения, $NK \in \Omega$.

Треугольники SBC и SNK подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними, поэтому $BC \parallel NK$. Следовательно, $BC \parallel \Omega$ по признаку параллельности прямой и плоскости.

В плоскости ACS проведем $KP \parallel SA$, P $\in$ AC.

Плоскость сечения пересекает плоскость основания пирамиды по прямой PL. По теореме о прямой и параллельной ей плоскости, $PL \parallel NK$.

б) Найдем расстояние от точки B до плоскости Ω.

Для этого есть разные методы.

Можно сказать, что точка B лежит на прямой BC, параллельной плоскости α. И расстояние от очки B до плоскости Ω равно расстоянию от любой точки прямой BC до плоскости Ω, а в качестве такой точки выбрать середину BC.

Более простой путь – применение метода объемов.

Метод объемов состоит в том, чтобы, записав двумя разными способами объем какой-либо треугольной пирамиды и приравняв эти выражения, найти нужную нам величину. Он отлично подходит для вычисления расстояния от точки до плоскости.

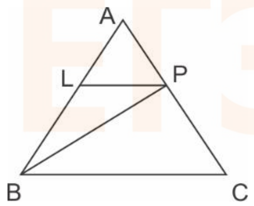
Рассмотрим треугольную пирамиду LPNB. Запишем ее объем двумя способами.

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$$

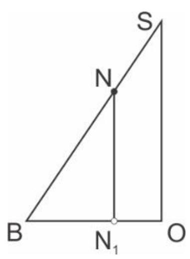
$V_{LPNB} = \frac{1}{3} S_{\Delta LBP} \cdot h_1 = \frac{1}{3} S_{\Delta LNP} \cdot d$, где h_1 – перпендикуляр, окруженный из точки N на плоскость ABC, d – расстояние от точки B до плоскости Ω.

По условию, $AB = 6, SA = 9$.

$AP = \frac{1}{3} AC$. Тогда $S_{\Delta ABP} = \frac{1}{3} S_{ABC}$, $AL = \frac{1}{3} AB$ и $S_{\Delta BLP} = \frac{2}{3} S_{\Delta APB} = \frac{2}{9} S_{\Delta ABC}$.



Пусть точка O – центр основания пирамиды, $BO = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ как радиус окружности, описанной вокруг правильного треугольника ABC.



Из прямоугольного треугольника BSO: $SO\sqrt{9^2-4\cdot 3}=\sqrt{81-12}=\sqrt{69}$;

$\triangle BNN_1 \sim \triangle BSO$

$NN_1 : SO = BN : OB = 2:3$; $NN_1=\frac{2}{3}\sqrt{69}=h_1$.

Поскольку $NK \parallel LP$, $LN \parallel PK$, четырехугольник $PLNK$- параллелограмм.

Рассмотрим треугольник LPN. Его площадь равна половине площади параллелограмма $PLNK$.

$S_{\triangle LNP}=\frac{1}{2}S_{PLNK}$.

Пирамида $SABC$- правильная. Пусть M – середина BC, $AM \perp BC$ (т.к. $\triangle ABC$ – правильный), $SM \perp BC$, т.к. $\triangle SBC$ – равнобедренный. Тогда $(ASM) \perp BC$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, и поэтому $SA \perp BC$.

Это значит, что $LN \perp NK$, так как $LN \parallel SA$ и $NK \parallel BC$. Получим, что $PLNK$ – прямоугольник, $S_{PLNK}=LN\cdot KN=\frac{2}{3}SA\cdot\frac{1}{3}BC=\frac{2}{9}\cdot 9\cdot 6=12$; $S_{\triangle LPN}=\frac{12}{2}=6$;

$$S_{\triangle ABC}=\frac{6^2\cdot\sqrt{3}}{4}=9\sqrt{3}.$$

$V_{LPNB}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9}\cdot 9\sqrt{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{69}=\frac{1}{3}\cdot 6\cdot d$, отсюда $d=\frac{2\sqrt{23}}{3}$

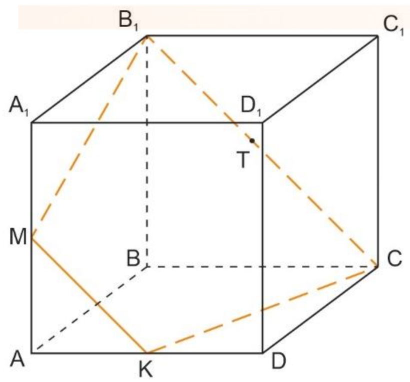
Ответ: б) $\frac{2\sqrt{23}}{3}$.

2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Плоскость сечения проходит через точку M – середину AA_1, точку K – середину AD и точку T, в которой пересекаются диагонали грани BB_1C_1C.

а) Докажите, что плоскость сечения проходит через две вершины куба.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC.

Решение:



а) МК – средняя линия ΔAA_1D, $MK||A_1D$, $B_1C||A_1D$, т.к. A_1B_1CD – параллелограмм, в нем $A_1B_1 = DC$ и $A_1B_1||DC$.

(можно уточнить, что A_1B_1CD – прямоугольник).

$T \in B_1C$, (MKT) – плоскость сечения,

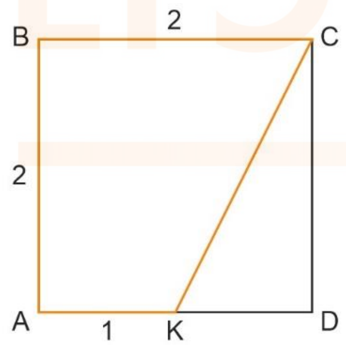
$B_1 \in (MKT)$, $C \in (MKT)$,

$B_1C||MK$ как линии пересечения параллельных плоскостей третьей плоскостью.

2 вершины куба лежат в плоскости MKT.

б) Применим формулу площади прямоугольной проекции фигуры.

$S_{\text{проекции}} = S_{\text{фигуры}} \cdot \cos\varphi$,



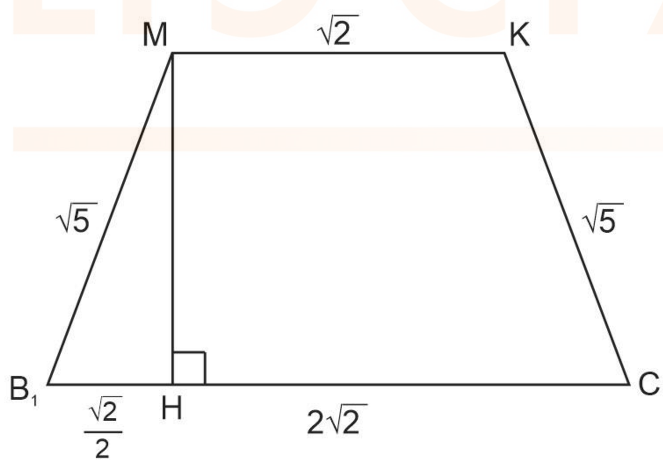
$ABCK$ - проекция MB_1CK на плоскость ABC, пусть ребро куба равно 2, тогда

$S_{ABCK} = \frac{BC+AK}{2} \cdot AB = 3$,

(как площадь трапеции),

MB_1CK – трапеция,

$MK = \sqrt{2}$, $B_1C = 2\sqrt{2}$, $KC = MB_1 = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$.



ΔMB_1H; $B_1H = \frac{B_1C - MK}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$MH = \sqrt{MB_1^2 - B_1H^2} = \sqrt{5 - \frac{1}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$,

(по теореме Пифагора)

$S_{MB_1CK} = \frac{B_1C + MK}{2} \cdot MH = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{9}{2}$,

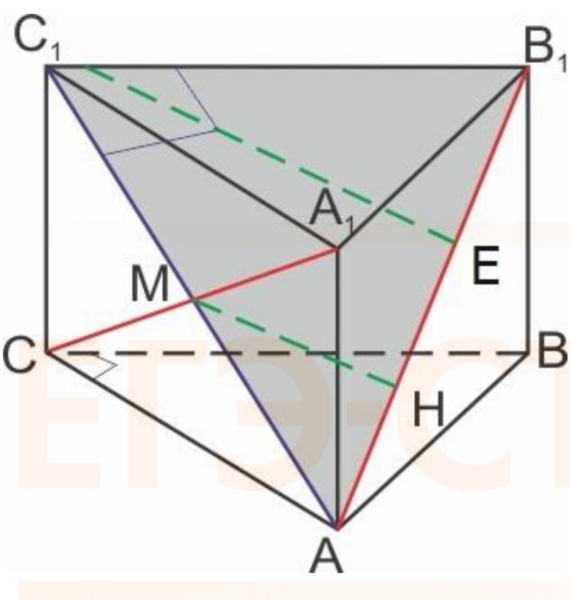
$\cos\varphi = \frac{S_{ABCK}}{S_{MB_1CK}} = \frac{3 \cdot 2}{9} = \frac{2}{3}$,

$\varphi = arccos\frac{2}{3}$.

Ответ: $\varphi = arccos\frac{2}{3}$

3. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.
а) Докажите, что $AA_1 = AC$.
б) Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1, если $AC = 6$, $BC = 3$.

Решение:



а) Докажем, что $AA_1 = AC$.

По условию,

$\left.\begin{matrix} B_1C_1 \perp C_1A_1 \\ B_1C_1 \perp CC_1 \text{ (т.к.призма прямая)} \end{matrix}\right\} \Rightarrow B_1C_1 \perp (AA_1C_1)$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

Мы получили, что точка C_1 – проекция точки B_1на (AA_1C_1) и прямая AC_1 – проекция наклонной AB_1 на (AA_1C_1).
По условию, $CA_1 \perp AB_1$.
Следовательно, $CA_1 \perp AC_1$ по теореме о трёх перпендикулярах.
Тогда AA_1C_1C – прямоугольник, диагонали которого перпендикулярны. Значит, AA_1C_1C – квадрат, $AA_1 = AC$.

б) Найдем расстояние между скрещивающимися прямыми CA_1 и AB_1, если $AC = 6$, $BC = 3$.

$$\left.\begin{matrix} A_1C \perp AC_1 \\ A_1C \perp AB_1 (\text{по условию}) \end{matrix}\right\} \Rightarrow A_1C \perp (AB_1C_1)$$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

Тогда $\triangle AB_1C_1$ – прямоугольный.
Пусть М – середина AC_1.
В плоскости AB_1C_1 проведём через точку М прямую $MH \perp AB_1$.
Кроме того, $MH \perp CA_1$, т.к. $CA_1 \perp (AB_1C_1)$; $MH \in (AB_1C_1)$.

Значит, МН – общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым AB_1 и CA_1 и длина МН равна расстоянию между этими прямыми.

Найдем МН.

В прямоугольном треугольнике AB_1C_1 проведем высоту C_1E. Треугольники АНМ и AB_1C_1 подобны по двум углам, поэтому $MH \parallel C_1E, MH = \frac{1}{2}C_1E$.
Найдём C_1E – высоту треугольника AB_1C_1.
$AC_1 = 6\sqrt{2}$ – как диагональ квадрата AA_1C_1C, сторона которого равна 6.
$AB = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$ – как гипотенуза прямоугольного треугольника ABC,
$AB_1 = \sqrt{45 + 36} = 9$ – как гипотенуза прямоугольного треугольника ABB_1.

$S_{\triangle AB_1C_1} = \frac{1}{2}AC_1 \cdot CB_1 = \frac{1}{2}AB_1 \cdot C_1E$. Отсюда $C_1E = \frac{AC_1 \cdot B_1C_1}{AB_1} = \frac{6\sqrt{9} \cdot 3}{9} = 2\sqrt{2}$

$\text{MH} = \frac{1}{2}C_1E = \sqrt{2}$
Ответ: $\sqrt{2}$

4. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B, а на окружности другого основания — точки B_1 и C_1, причем BB_1 — образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.
а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.
б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если $AB = 20$, $BB_1 = 15$, $B_1C_1 = 21$.