

Метод оценки, или Эхил и черепаха

Апорию Зенона об Ахиллесе и черепахе знают все. Одни — потому что учились в физмат-школе, другие — потому что читали «Войну и мир». В начале третьей части третьего тома Лев Толстой пересказывает это парадоксальное доказательство, суть которого в том, что быстрый Ахиллес никогда не догонит медлительную черепаху¹.

Об Эхиле и черепахе почти никто не знает, и эту драматическую историю я сейчас расскажу.

Рассмотрим уравнение

$$2^{(\sqrt{3}-\cos 10\pi x)(\sqrt{3}+\cos 10\pi x)} = 8 + (20x + 3)^2.$$

Оно отлично подходит для первого знакомства с методом оценки — конечно, если вы уже уверенно решаете алгебраические, тригонометрические и показательные уравнения, то есть вы освоили всю часть В и еще задачу С1 (если ориентироваться на структуру ЕГЭ 2010 года).

Очень редко я рассказываю ученикам готовые решения. Ведь моя цель — научить их решать задачи самостоятельно.

Для начала я предлагаю группе учеников проанализировать это уравнение и сделать с ним все, что можно.

Когда меня спрашивают «А что надо делать?» — я отвечаю, что правило простое: если от ваших преобразований уравнение становится заметно хуже — скорее всего, вы идете не туда.

Довольно быстро уравнение приводят вот к такому виду:

$$2^{3-\cos^2 10\pi x} = 8 + (20x + 3)^2;$$

$$\frac{8}{2^{\cos^2 10\pi x}} = 8 + (20x + 3)^2.$$

— А теперь смотрите, — говорю я. — В левой и правой части появились восьмерки — а это уже добрый знак.

Помните, что перед составителями заданий части С стоит нетривиальная задача: с одной стороны, им надо составить сложные задания, с другой — сделать так, чтобы подготовленный школьник все же смог их решить.

Поэтому в сложных задачах части С часто оставляют «подсказки» — специально для вас, мои дорогие друзья! Торчащие ниточки, хвостики, за которые, как в детективном сюжете, можно потянуть и распутать весь клубок. Например, вы вдруг замечаете, что одна из частей уравнения является полным квадратом. Или видите одинаковые коэффициенты в левой и правой части, что наводит на мысль об удачной замене. А в данном уравнении подсказка — вот эти восьмерки слева и справа.

— А что еще можно заметить в этом уравнении? — спрашиваю я своих учеников. — Если бы вас попросили рассказать о нем, как бы вы его описали?

¹Допустим, Ахиллес бежит в десять раз быстрее, чем черепаха, и находится от нее на расстоянии в 1 километр. За то время, за которое Ахиллес пробежит этот километр, черепаха проползет 100 метров. Когда Ахиллес пробежит 100 метров, черепаха проползет еще 10 метров, и так далее. Когда Ахиллес пробежит эти десять, черепаха проползет один метр. Процесс будет продолжаться до бесконечности, расстояние между ними будет бесконечно сокращаться, но Ахиллес так никогда и не догонит черепаху!

Первые ответы не слишком конструктивны, например: «Это уравнение отстойное» :-)

— В чем конкретно его отстойность? — спрашиваю я.

— В нем слишком много всего. В нем есть косинусы, показательная функция и алгебраическое выражение в правой части.

— Точнее, — говорю я, — в левой и правой его частях находятся функции разных типов.

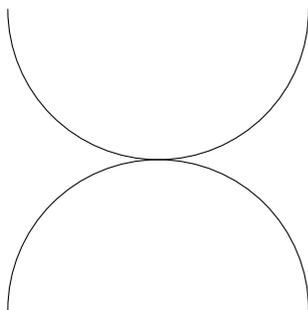
Ведь типов элементарных функций вообще не так уж много: алгебраические, тригонометрические, обратные тригонометрические, показательные и логарифмические. Как правило, в уравнение входят функции какого-то одного типа — только тригонометрические, или только показательные, или только алгебраические. И для каждого типа уравнений, заметьте, — свои способы решения. Для логарифмических уравнений — особые способы, для тригонометрических — особые, и вы их прекрасно знаете.

Но что делать, если в левой и правой частях уравнения — функции разных типов? Такое уравнение бесполезно возводить в квадрат или делать с ним арифметические действия. Бесполезно брать логарифмы от обеих частей — от всего этого оно станет только хуже.

Запомним: если в левой и правой частях уравнения стоят функции разных типов, такое уравнение традиционными аналитическими способами не решается. Его нужно решать либо графически, либо методом оценки.

Давайте оценим левую и правую части. Узнаем, какие значения принимают стоящие в них функции.

И пока мои ученики занимаются этим, я рисую картинку:



И жду, пока на нее обратят внимание.

— Этот рисунок, — говорю я, — с определенного момента древние греки вдруг начали рисовать на своих вазах. Похоже было на новую, внезапно возникшую моду. И не могли историки понять, что за символ и в чем его смысл. Много было догадок, пока наконец не нашли амфору с таким рисунком и надписью: «Эсхил и черепаха». И всё встало на свои места.

Античного драматурга Эсхила по праву называют создателем греческого — а значит и европейского — театра. Именно Эсхил ввел в театральное действие второго актера (до него актер был всего один). До нашего времени дошло семь трагедий Эсхила, в том числе «Прометей прикованный» — о титане Прометее, который похитил с небес огонь и принес его людям.

Когда Эсхил был в расцвете славы, оракул предсказал ему гибель от падения тяжелого предмета на голову. Эсхил перестал спать в помещении и старался проводить больше времени на воздухе, благо театр у греков располагался под открытым небом.

Но однажды Эсхил гулял за городом, возможно, обдумывая новый гениальный сюжет. А в это время высоко над ним летел орел, неся в когтях черепаху. Он высматривал внизу камень, чтобы сбросить на него черепаху и разбить панцирь, и, не найдя ничего более подходящего, сбросил черепаху с высоты прямо на лысую голову великого драматурга. . .

Так сбылось предсказание. Современники нашли в этой истории мистический смысл — не иначе как в трагедии «Прометей прикованный» Эсхил открыл непосвященным тайны мистерий, и его настигло возмездие богов. И рисунок, символизирующий роковую встречу Эсхила с черепахой, появился на греческих вазах.

Вернемся к нашему уравнению. Итак, в левой и правой его частях находятся функции разных типов. И при определенном значении x они оказались равны друг другу. Более того: левая часть принимает значения больше либо равные восьми, правая часть — значения меньше либо равные восьми. И возможно, есть такая точка, где у одной из этих функций будет минимум, а у другой — максимум, причем значение каждой из них равно восьми.

Нам осталось только проверить, что эта точка действительно есть.

Приравняем правую часть к восьми.

$$\begin{aligned} 8 + (20x + 3)^2 &= 8, \\ (20x + 3)^2 &= 0, \\ x &= -\frac{3}{20} = -0,15. \end{aligned}$$

Подставив $x = -0,15$ в левую часть, получим, что и она равна восьми при этом значении x . Значит, $x = -0,15$ является единственным корнем данного уравнения.

Ответ: $x = -0,15$.

Вот еще одна задача на метод оценки. Это С3 из пробного варианта ЕГЭ 2010 года.

$$7^{-|x-3|} \cdot \log_2(6x - x^2 - 7) \geq 1.$$

Умножим обе части данного неравенства на положительную величину $7^{|x-3|}$:

$$\log_2(6x - x^2 - 7) \geq 7^{|x-3|}.$$

В левой и правой частях полученного неравенства оказались функции разных типов. Поэтому можно попытаться решить его методом оценки.

Выделим под логарифмом полный квадрат:

$$6x - x^2 - 7 = 2 - (x^2 - 6x + 9) = 2 - (x - 3)^2.$$

Неравенство примет вид:

$$\log_2(2 - (x - 3)^2) \geq 7^{|x-3|}.$$

Наибольшее значение выражения под логарифмом равно 2. Стало быть, наибольшее значение логарифма равно $\log_2 2$, то есть 1, и достигается оно при единственном значении $x = 3$.

В то же время, наименьшее значение выражения $7^{|x-3|}$ также равно 1, и достигается оно при том же единственном значении $x = 3$.

Поэтому последнее неравенство будет выполнено лишь в одном-единственном случае: когда обе его части равны 1, т. е. при $x = 3$. Решением данного неравенства служит единственное число!

Ответ: $x = 3$.

И еще несколько задач на ту же тему.

- $\sqrt{16 - (4x + 5)^2} = 4 + \cos^2 \frac{2\pi x}{5}.$

2. $\sin^2 x + 3x^2 \cos x + 3x^2 = 0$.

3. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} = 4 - \left|\sin \frac{\pi(x-1)}{4}\right|$.

Я уверена, что эта статья окажется полезной для вашей подготовки к ЕГЭ. Кратко повторим основные тезисы:

1. В сложных задачах части С чаще всего специально для вас оставляют подсказки. Учитесь ими пользоваться!

2. Если в левой и правой частях уравнения находятся функции разных типов — значит, это уравнение надо решать либо графически, либо методом оценки.

3. Как правило, находится единственное значение x , при котором левая и правая часть равны друг другу.

Желаю вам успеха на ЕГЭ по математике!