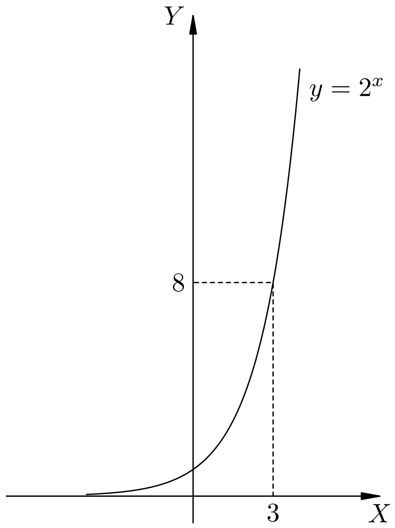
Показательные уравнения

Рассмотрим уравнение $2^x = 8$. В какую степень надо возвести 2, чтобы получить 8? Ясно, что в степень 3.

Более того, $x = 3$ — единственное решение данного уравнения. Почему? Это легко понять, посмотрев на график показательной функции $y = 2^x$: данная функция монотонно возрастает, и потому каждое своё значение принимает ровно один раз. Иными словами, не существует других значений x, кроме 3, таких, что $2^x = 8$.



Простейшее показательное уравнение — это уравнение вида

$$a^x = b, \tag{1}$$

где $a > 1$ или $0 < a < 1$.

Если $b > 0$, то уравнение (1) имеет решение, и притом единственное. Действительно, при $a > 1$ показательная функция монотонно возрастает, а при $0 < a < 1$ — монотонно убывает; в любом случае она принимает каждое своё значение ровно один раз.

А вот если $b \leqslant 0$, то уравнение (1) не имеет решений: ведь показательная функция может принимать только положительные значения.

Любое показательное уравнение после соответствующих преобразований сводится к решению одного или нескольких простейших.

В задачах B5 вариантов ЕГЭ достаточно представить левую и правую части в виде степеней с одинаковым основанием.

1. $5^{x-7} = \dfrac{1}{125}$.

Вспоминаем, что $125 = 5^3$. Уравнение приобретает вид: $5^{x-7} = 5^{-3}$. В силу монотонности показательной функции показатели степени равны: $x - 7 = -3$, откуда $x = 4$.

2. $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-3-x} = 512$.

Поскольку $\frac{1}{8} = 2^{-3}$, $512 = 2^9$, уравнение можно записать в виде:

$$(2^{-3})^{-3-x} = 2^9.$$

Дальнейшее ясно:

$$2^{9+3x} = 2^9,$$
$$9+3x = 9,$$
$$x = 0.$$

Теперь рассмотрим более сложные уравнения. Идеи их решения вам могут пригодиться на ЕГЭ в части С, на олимпиадах и дополнительных вступительных экзаменах.

3. $33 \cdot 2^{x-1} - 2^{x+1} = 29$.

Здесь лучше всего вынести за скобку двойку в наименьшей степени:

$$2^{x-1}(33-2^2) = 29,$$
$$2^{x-1} \cdot 29 = 29,$$
$$2^{x-1} = 1,$$
$$x-1 = 0,$$
$$x = 1.$$

4. $4^x - 5 \cdot 2^x - 24 = 0$.

Делаем замену $t = 2^x$. Тогда $4^x = 2^{2x} = t^2$, и относительно t мы получаем квадратное уравнение: $t^2 - 5t - 24 = 0$. Его корни: $t_1 = 8$ и $t_2 = -3$.

В первом случае имеем: $2^x = 8$, откуда $x = 3$.

Во втором случае: $2^x = -3$, решений нет.

Ответ: 3.

5. $3 \cdot 16^x + 36^x - 2 \cdot 81^x = 0$.

Замечаем, что $16 = 4^2$, $81 = 9^2$, а $36 = 4 \cdot 9$:

$$3 \cdot 4^{2x} + 4^x \cdot 9^x - 2 \cdot 9^{2x} = 0.$$

Делим обе части на положительную величину 9^{2x}:

$$3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{2x} + \left(\frac{4}{9}\right)^{x} - 2 = 0.$$

Делаем замену $t = \left(\frac{4}{9}\right)^x$:

$$3t^2 + t - 2 = 0.$$

Полученное квадратное уравнение имеет корни -1 и $\frac{2}{3}$.

В случае $\left(\frac{4}{9}\right)^x = -1$ решений нет.

В случае $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3}$ имеем единственный корень $x = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Вообще, показательные уравнения вида

$$A \cdot a^{2x} + B \cdot a^x b^x + C \cdot b^{2x} = 0$$

называются *однородными*. Для них существует стандартный приём решения — деление обеих частей на b^{2x} (эта величина не равна нулю, так как показательная функция может принимать только положительные значения). Именно этим приёмом мы в данной задаче и воспользовались.

С однородными уравнениями, кстати, мы уже встречались — в тригонометрии. Это были уравнения вида

$$A \sin^2 x + B \sin x \cos x + C \cos^2 x = 0.$$

Их мы решали похожим приёмом — делением на $\cos^2 x$.