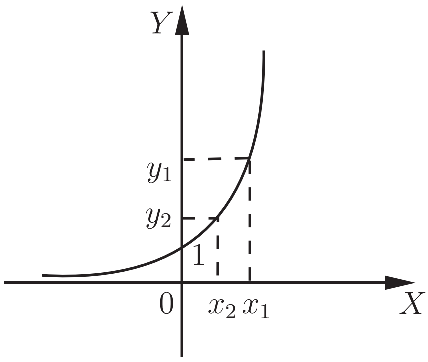
Показательные и логарифмические неравенства. 1

Знакомство с этой темой мы начнем с самых простых неравенств. Расскажем, что на самом деле стоит за выражением «отбросим логарифмы» и зачем нужна область допустимых значений. Наша цель — помочь вам научиться решать сложные неравенства, в вариантах ЕГЭ встречающиеся под номером С3.

Начнем с самых простых неравенств. Когда в ЕГЭ была часть А (с выбором ответа), там встречались неравенства такого типа:

1. $2^x > 8$.
Так же, как и при решении простейших показательных уравнений, представим правую часть в виде степени числа 2:
$2^x > 2^3$.

Когда я спрашиваю школьников, что делать дальше, они обычно отвечают: «Убрать основания!» Я не против такой формулировки, просто надо четко представлять себе, почему мы так делаем. А для этого — вспомним, как выглядит график показательной функции $y = 2^x$.



$x_1 > x_2 \Leftrightarrow 2^{x_1} > 2^{x_2}$

Видим, что эта функция монотонно возрастает, то есть большему значению x отвечает большее значение y. И наоборот, если $2^{x_1} > 2^{x_2}$, то $x_1 > x_2$.
Итак, от неравенства $2^x > 2^3$ можно перейти к алгебраическому неравенству $x > 3$.
Ответ: $x \in (3; +\infty)$.

2. Следующее неравенство:
$2^x > 7$.
Так же, как и в предыдущем примере, представим правую часть в виде значения показательной функции. Как это сделать? С помощью логарифма, конечно:
$7 = 2^{\log_2 7}$.

Получаем:
$2^x > 2^{\log_2 7}$;
$x > \log_2 7$.

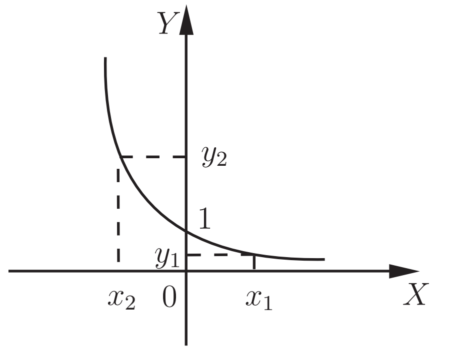
3. Еще одно неравенство:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{16}.$$

Здесь правую часть удобно представить как $\left(\frac{1}{2}\right)^4$.

$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^4$.

Вспомним, как выглядит график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$:



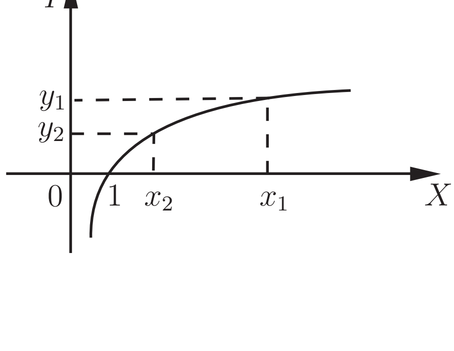
$$x_1 > x_2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}$$

Эта функция монотонно убывает (так как основание степени меньше единицы), поэтому большее значение функции соответствует меньшему значению аргумента. То есть из неравенства $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^4$ следует, что $x < 4$. Знак неравенства меняется!

Похожая ситуация возникает и при решении логарифмических неравенств.

4. Рассмотрим неравенство $\log_3 x > \log_3 5$.
Поскольку логарифмы определены только для положительных чисел, необходимо, чтобы x был положительным. Условие $x > 0$ называется областью допустимых значений (ОДЗ) данного неравенства. Только при таких x неравенство имеет смысл.

Что делать дальше? Стандартный ответ, который дают школьники, — «Отбросить логарифмы!»
Что ж, эта формулировка лихо звучит и легко запоминается. Но почему мы все-таки можем это сделать?
Мы люди, мы обладаем интеллектом. Наш разум устроен так, что все логичное, понятное, имеющее внутреннюю структуру запоминается и применяется намного лучше, чем случайные и не связанные между собой факты. Вот почему важно не механически вызубрить правила, как дрессированная собачка-математик, а действовать осознанно.
Так почему же мы все-таки «отбрасываем логарифмы»?
Ответ простой: если основание больше единицы (как в нашем случае), логарифмическая функция монотонно возрастает, значит, большему значению x соответствует большее значение y и из неравенства $\log_3 x_1 > \log_3 x_2$ следует, что $x_1 > x_2$.



$$x_1 > x_2 \Leftrightarrow \log_3 x_1 > \log_3 x_2$$

Обратите внимание, мы перешли к алгебраическому неравенству, и знак неравенства при этом — сохраняется.

Итак, $x > 5$.

Следующее логарифмическое неравенство тоже простое.

5. $\log_5(15 + 3x) > \log_5 2x$.

Начнём с области допустимых значений. Логарифмы определены только для положительных чисел, поэтому

$$\begin{cases} 15 + 3x > 0; \\ 2x > 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим: $x > 0$.
Теперь от логарифмического неравенства перейдем к алгебраическому — «отбросим» логарифмы. Поскольку основание логарифма больше единицы, знак неравенства при этом сохраняется.
$15 + 3x > 2x$.
Получаем: $x > -15$.

Итак,
$$\begin{cases} x > 0; \\ x > -15. \end{cases}$$
Ответ: $x > 0$.

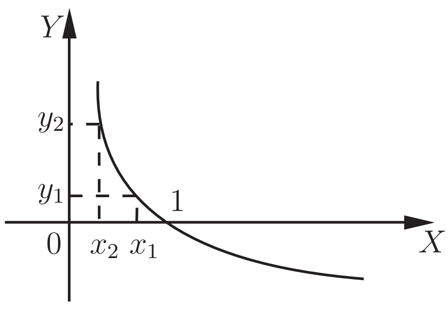
А что же будет, если основание логарифма меньше единицы? Легко догадаться, что в этом случае при переходе к алгебраическому неравенству знак неравенства будет меняться.
Приведем пример.

6. $\log_{\frac{5}{6}}(2x - 9) \geq \log_{\frac{5}{6}} x$.

Запишем ОДЗ. Выражения, от которых берутся логарифмы, должны быть положительно, то есть
$$\begin{cases} 2x - 9 > 0; \\ x > 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим: $x > 4.5$.

Поскольку $\dfrac{5}{6} < 1$, логарифмическая функция с основанием $\dfrac{5}{6}$ монотонно убывает. А это значит, что большему значению функции отвечает меньшее значение аргумента:



$x_1 > x_2 \Leftrightarrow \log_{\frac{5}{6}} x_1 < \log_{\frac{5}{6}} x_1$

И если $\log_{\frac{5}{6}}(2x-9) \geq \log_{\frac{5}{6}} x$, то
$2x - 9 \leq x$.
Получим, что $x \leq 9$.
Учитывая, что $x > 4.5$, запишем ответ:
$x \in (4.5; 9]$.

В следующей задаче показательное неравенство сводится к квадратному. Так что тему «квадратные неравенства» рекомендуем повторить.

7. $4^x - 2 \cdot 5^{2x} - 10^x > 0$.

Заметим, что $4^x = 2^{2x}$, $10^x = 5^x \cdot 2^x$, и запишем неравенство в виде:

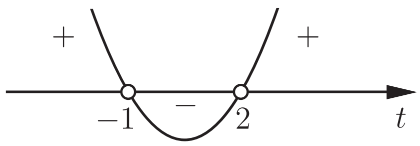
$2^{2x} - 5^x \cdot 2^x - 2 \cdot 5^{2x} > 0$.

Разделим обе части на положительную величину 5^{2x} и обозначим $\left(\frac{2}{5}\right)^x = t$. Получим квадратное неравенство:

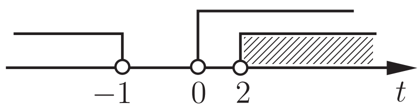
$t^2 - t - 2 > 0$.

Кроме того, $t > 0$.

Графиком функции $y = t^2 - t - 2$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Решая квадратное уравнение $t^2 - t - 2 = 0$, получим $t_1 = -1$, $t_2 = 2$. В этих точках наша парабола пересекает ось t.



Отметим на числовой прямой промежутки, являющиеся решениями неравенств $t^2 - t - 2 > 0$ и $t > 0$.



Видим, что обоим неравенствам удовлетворяют значения $t > 2$.
Но решение еще не закончено! Нам нужно вернуться к переменной x. Вспомним, что $t = \left(\frac{2}{5}\right)^x$ и получим:

$\left(\frac{2}{5}\right)^x > 2$.

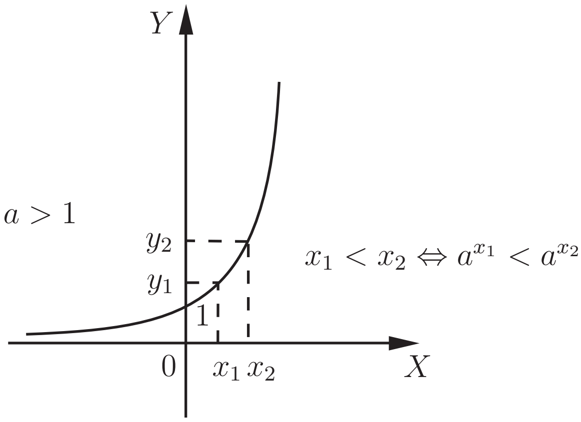
Представим 2 в виде степени с основанием $\frac{2}{5}$:

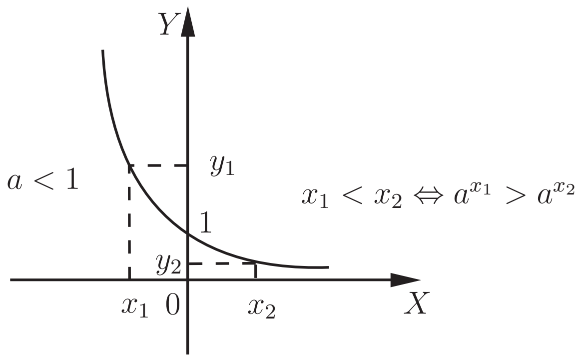
$\left(\frac{2}{5}\right)^x > \left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{\frac{2}{5}} 2}$

Получим: $x < \log_{\frac{2}{5}} 2$.

Подведем итоги. И показательные, и логарифмические неравенства решаются практически одинаково. В первом случае — «отбрасываем основания». Во втором — «отбрасываем логарифмы». При этом, если основание больше единицы, знак неравенства сохраняется. Если основание меньше единицы — знак неравенства меняется на противоположный.

Показательные неравенства





Логарифмические неравенства