Показательные и логарифмические неравенства. 2

Продолжим рассказ о решении показательных и логарифмических неравенств. В этой статье мы разберем наиболее сложные задачи С3 из вариантов 2011 года и расскажем о специальных приемах, упрощающих решение. Например, во многих задачах С3 этого года не обойтись без метода замены множителя. По-другому его называют — метод рационализации неравенства.

В редких случаях задача С3 решается без каких-либо хитростей. Достаточно помнить свойства логарифмов, не забывать об ОДЗ и знать универсальные приемы — такие, как замена переменной и метод интервалов.

1. $4\log_x 4 + 3\log_{\frac{4}{x}} 4 + 4\log_{16x} 4 \leq 0.$

Запомним правило: если в уравнении или неравенстве присутствуют корни, дроби или логарифмы — решение надо начинать с области допустимых значений. Поскольку основание логарифма должно быть положительно и не равно единице, получим систему условий:

$$\begin{cases} x > 0; \\ \frac{4}{x} \neq 1; \\ x \neq 1; \\ 16x \neq 1. \end{cases}$$

Упростим эту систему:

$$\begin{cases} x > 0; \\ x \neq 4; \\ x \neq 1; \\ x \neq \frac{1}{16}. \end{cases}$$

Это область допустимых значений неравенства.

Мы видим, что переменная содержится в основании логарифма. Перейдем к постоянному основанию. Напомним, что

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

В данном случае удобно перейти к основанию 4.

$$\frac{4}{\log_4 x} + \frac{3}{\log_4 \frac{4}{x}} + \frac{4}{\log_4 (16x)} \leq 0;$$

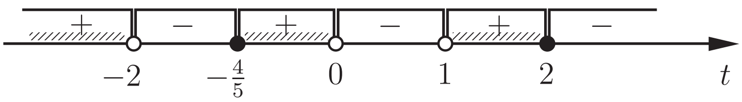
$$\frac{4}{\log_4 x} + \frac{3}{1 - \log_4 x} + \frac{4}{2 + \log_4 x} \leq 0.$$

Сделаем замену $\log_4 x = t$:

$$\frac{4}{t} + \frac{3}{1-t} + \frac{4}{2+t} \leq 0.$$

Упростим неравенство и решим его методом интервалов:

$$\frac{(t-2)\left(t+\frac{4}{5}\right)}{t\,(1-t)\,(2+t)} \geq 0.$$



Итак, $t \in (-\infty;\ -2) \cup \left[-\frac{4}{5};\ 0\right) \cup (1;\ 2]$.

Вернемся к переменной x:

$$\left[\begin{array}{l} \log_4 x < -2 \\ \\ -\frac{4}{5} \leq \log_4 x < 0 \\ \\ 1 \leq \log_4 x < 2 \end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \qquad \left[\begin{array}{l} 0 \leq x \leq \frac{1}{16} \\ \\ 4^{-\frac{4}{5}} \leq x < 1 \\ \\ 4 < x \leq 16 \end{array}\right.$$

Мы добавили условие $x > 0$ (из ОДЗ).

Ответ: $x \in \left(0;\ \frac{1}{16}\right) \cup \left[4^{-\frac{4}{5}};\ 1\right) \cup (4;\ 16]$.

2. Следующая задача тоже решается с помощью метода интервалов.

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2-3x}{x}\right) \geq -1.$$

Как всегда, решение логарифмического неравенства начинаем с области допустимых значений. В данном случае

$$\frac{2-3x}{x} > 0.$$

Это условие обязательно должно выполняться, и к нему мы вернемся. Рассмотрим пока само неравенство. Запишем левую часть как логарифм по основанию 3:

$$\log_3 \frac{x}{2-3x} \geq -1.$$

Правую часть тоже можно записать как логарифм по основанию 3, а затем перейти к алгебраическому неравенству:

$$\log_3 \frac{x}{2-3x} \geq \log_3 \frac{1}{3};$$

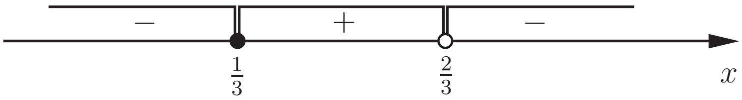
$$\frac{x}{2-3x} \geq \frac{1}{3}.$$

Видим, что условие $\frac{2-3x}{x} > 0$ (то есть ОДЗ) теперь выполняется автоматически. Что ж, это упрощает решение неравенства.

$$\frac{x}{2-3x} - \frac{1}{3} \geq 0;$$

$$\frac{3x-1}{2-3x} \geq 0.$$

Решаем неравенство методом интервалов:



Ответ: $x \in \left[\frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right)$.

3. Следующая задача была предложена на пробном ЕГЭ в октябре 2010 года. Вид у нее устрашающий, однако решается она довольно быстро.

$$\log_2\left(\left(5^{-x^2}-3\right)\left(5^{-x^2+9}-1\right)\right)+\log_2\frac{5^{-x^2}-3}{5^{-x^2+9}-1} > \log_2\left(5^{4-x^2}-2\right)^2.$$

Выражение 5^{-x^2} навязчиво повторяется в условии задачи. А это значит, что можно сделать замену:

$$5^{-x^2}=t.$$

Поскольку показательная функция принимает только положительные значения, $t>0$. Тогда

$$5^{-x^2+9}=5^9\cdot t;$$

$$5^{4-x^2}=5^4\cdot t=625t.$$

Неравенство примет вид:

$$\log_2\Big((t-3)\left(5^9\cdot t-1\right)\Big)+\log_2\frac{t-3}{5^9\cdot t-1} > \log_2\left(625t-2\right)^2.$$

Уже лучше. Найдем область допустимых значений неравенства. Мы уже сказали, что $t>0$. Кроме того, $(t-3)\left(5^9\cdot t-1\right)>0$.

Если это условие выполнено, то и частное $\frac{t-3}{5^9\cdot t-1}$ будет положительным.

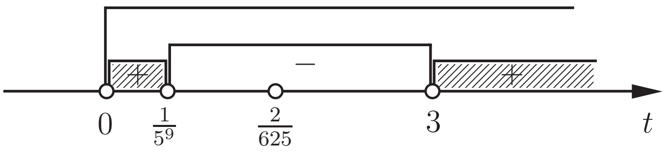
А еще выражение под логарифмом в правой части неравенства должно быть положительно, то есть $(625t-2)^2$.

Это означает, что $625t-2\neq 0$, то есть $t\neq\frac{2}{625}$.

Аккуратно запишем ОДЗ:

$$\begin{cases} t > 0; \\ \dfrac{t-3}{5^9 \cdot t - 1} > 0; \\ 625t - 2 \neq 0 \end{cases}$$

и решим получившуюся систему, применяя метод интервалов.



Итак, $t \in \left(0; \dfrac{1}{5^9}\right) \cup (3; +\infty)$.

Ну что ж, полдела сделано — разобрались с ОДЗ. Решаем само неравенство. Сумму логарифмов в левой части представим как логарифм произведения:

$$\log_2 \frac{(t-3)\cancel{(5^9 \cdot t - 1)}(t-3)}{\cancel{(5^9 \cdot t - 1)}} > \log_2 (625t - 2)^2.$$

«Отбросим» логарифмы. Знак неравенства сохраняется.

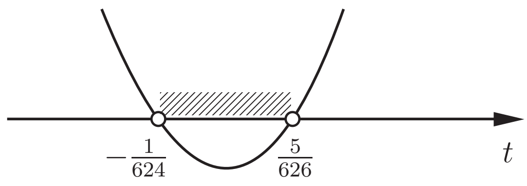
$$(t-3)^2 > (625t-2)^2.$$

Перенесем все в левую часть и разложим по известной формуле разности квадратов:

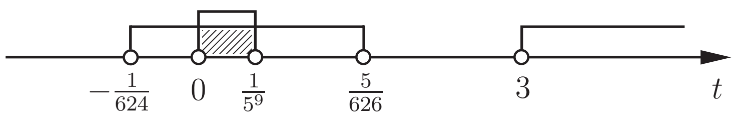
$$(t-3)^2 - (625t-2)^2 > 0;$$

$$(t - 3 - 625t + 2)(t - 3 + 625t - 2) > 0;$$

$$(-624t - 1)(626t - 5) > 0.$$



Вспомним, что $t \in \left(0;\ \dfrac{1}{5^9}\right) \cup (3; +\infty)$ (это ОДЗ неравенства) и найдем пересечение полученных промежутков.



Получим, что $t < \dfrac{1}{5^9}$.

Вернемся к переменной x.

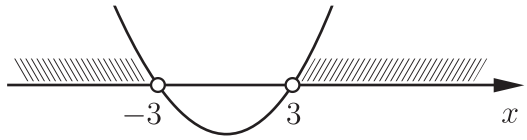
Поскольку $t = 5^{-x^2}$,

$$5^{-x^2} < 5^{-9};$$

$$-x^2 < -9;$$

$$x^2 > 9;$$

$$(x-3)(x+3) > 0.$$



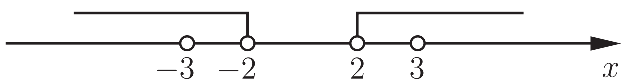
Ответ: $x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

4. Еще один прием, упрощающий решение логарифмических неравенств, — переход к постоянному основанию. Покажем, как использовать переход к другому основанию и обобщенный метод интервалов.

$$\log_{|x|-2} |x-3| \leq 0.$$

Запишем ОДЗ:

$$\begin{cases} |x| - 2 > 0; \\ |x| - 2 \neq 1; \\ |x-3| \neq 0. \end{cases}$$



Воспользуемся формулой $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ и перейдем к основанию 10:

$$\frac{\lg |x-3|}{\lg (|x|-2)} \leq 0.$$

Применим обобщенный метод интервалов. Выражение в левой части неравенства можно записать как функцию

$$g(x) = \frac{\lg |x-3|}{\lg (|x|-2)}.$$

Эта функция может менять знак в точках, где она равна нулю или не существует.

Выражение $\lg |x-3|$ равно нулю, если $|x-3| = 1$, то есть $x = 4$ или $x = 2$.
Выражение $\lg (|x|-2)$ равно нулю, если $|x| = 3$, то есть в точках 3 и -3.

Отметим эти точки на числовой прямой, с учетом ОДЗ неравенства.

Найдем знак функции $g(x)$ на каждом из промежутков, на которые эти точки разбивают область допустимых значений. Точно так же мы решали методом интервалов обычные рациональные неравенства.

Ответ: $x \in (-3;\ -2) \cup (3;\ 4]$.

Еще один способ решения сложных задач — **метод рационализации неравенства**. Другое название — **метод замены множителя**. Это — как раз из тех секретов, о которых ученику рассказывает репетитор. В учебниках о таком не написано.

Суть метода в том, чтобы от неравенства, содержащего в качестве множителей сложные показательные или логарифмические выражения, перейти к равносильному ему более простому рациональному неравенству.

Давайте для начала вспомним, что такое равносильные уравнения (или неравенства) В школьной программе этот важный вопрос почти не обсуждается. Поэтому запишем определение.

Равносильными называются уравнения, множества решений которых совпадают.

Заметим, что внешне уравнения могут быть и не похожи друг на друга.

Например, уравнения $(x-3)^2 = 0$ и $x - 3 = 0$ равносильны. Число 3 является единственным решением и того, и другого.

Уравнения $x^2 = -1$ и $\sqrt{x} = -2$ также равносильны. Оба они не имеют решений. Другими словами, множество решений каждого из них — пусто.

Уравнения $\sqrt{2x-1} = x - 2$ и $2x - 1 = (x-2)^2$ не являются равносильными. Решением первого уравнения является только $x = 5$. Решения второго — два числа: $x = 5$ и $x = 1$. Получается, что возведение обеих частей уравнения в квадрат в общем случае приводит к уравнению, неравносильному исходному.

Аналогичное определение — для неравенств.

Равносильными называются неравенства, множества решений которых совпадают.

Например, неравенства $(x-1)(x-3) > 0$ и $\dfrac{x-1}{x-3} > 0$ равносильны — ведь множества их решений совпадают. В этом легко убедиться с помощью метода интервалов.

Неравенства $\log_2 x > \log_2 5$ и $x > 5$ также равносильны при $x > 0$. Заметим, что внешне эти неравенства не похожи — одно из них логарифмическое, другое алгебраическое.

Другими словами, при $x > 0$ неравенства $\log_2 x - \log_2 5 > 0$ и $x - 5 > 0$ имеют одинаковые решения. Если какое-либо число $x > 0$ является решением одного из них, то оно будет и решением второго.

А это значит, что при любом $x > 0$ выражение $\log_2 x - \log_2 5$ будет иметь такой же знак, как и выражение $x - 5$. Следовательно, если в какое-либо сложное неравенство входит в качестве множителя выражение $\log_2 x - \log_2 5$, то при выполнении условия $x > 0$ его можно заменить на более простое $x - 5$ и получить неравенство, равносильное исходному.

Вот ключевой момент. На этом и основан метод рационализации — замены множителей, содержащих сложные логарифмические или показательные выражения, на более простые алгебраические множители.

Например, выражение вида $\log_a f - \log_a g$, где f и g — функции от x, a — число, можно заменить на более простое $(f - g)(a - 1)$ — конечно, при условии, что $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$. Доказательство легко провести самостоятельно.

А сейчас — самое главное: волшебная таблица, позволяющая заменять сложные логарифмические (или показательные) множители в неравенствах на более простые. Эта таблица является ключом к задаче С3. Вот увидите, она выручит вас на ЕГЭ по математике:

Сложный множитель	На что заменить
$\log_h f - \log_h g$	$(h-1)(f-g)$
$\log_h f - 1$	$(h-1)(f-h)$
$\log_h f$	$(h-1)(f-1)$
$h^f - h^g$	$(h-1)(f-g)$
$h^f - 1$	$(h-1) \cdot f$
$f^h - g^h$	$(f-g) \cdot h$
f, g — функции от x. h — функция или число.	

Конечно же, все выражения, которые содержат логарифмы, существуют при $f, g, h > 0$ и $h \neq 1$.

Обратите внимание, что мы говорим о замене множителя в неравенствах вида $\dfrac{f(x)}{g(x)} \vee 0$. Правая часть обязательно должна быть равна нулю. Иначе ничего не получится.

Не исключено, что на ЕГЭ по математике вам попадется сложное логарифмическое или показательное неравенство. Поэтому мы разберем несколько задач из тренировочных вариантов 2011 года. Вы можете найти их в сборнике «ЕГЭ-2011. Математика. Типовые экзаменационные варианты. 30 вариантов» под редакцией А.Л. Семенова и И.В. Ященко. Там также разбираются подобные задачи, хотя и менее подробно.

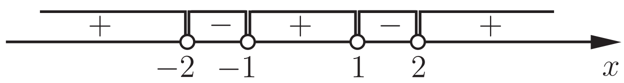
5. $\log_{2-x}(x+2) \cdot \log_{x+3}(3-x) \leq 0$.

ОДЗ неравенства: $x \in (-2; 1) \cup (1;\ 2)$.

Применим метод рационализации. В соответствии с нашей таблицей, множитель $\log_{2-x}(x+2)$ заменим на $(2-x-1)(x+2-1)$. Множитель вида $\log_{x+3}(3-x)$ заменим на $(x+3-1)(3-x-1)$. Таким образом, от логарифмического неравенства мы перешли к рациональному:

$$(1-x)(x+1)(x+2)(2-x) \leq 0.$$

Решим его методом интервалов:



Ответ: $x \in (-2;\ -1] \cup (1;\ 2)$.

6. $\dfrac{10^x}{2 \cdot \log_2^2 (x+1)^2 \cdot \log_3 (x+2)} \leq \dfrac{(15 \cdot 3^x)^x}{9 \cdot \log_2^2 (x+1)^2 \cdot \log_3 (x+2)}$.

Начнем с ОДЗ.

$$\begin{cases} x \neq 0; \\ x > -2; \\ x \neq -1. \end{cases}$$

Заметим, что выражение $\log_2^2 (x+1)^2$ положительно при $x \in$ ОДЗ. Умножим обе части неравенства на это выражение.

Упростим числитель правой части неравенства:

$$(15 \cdot 3^x)^x = 5^x \cdot 3^x \cdot 3^{x^2} = 5^x \cdot 3^{x^2+x}.$$

Поделим обе части неравенства на $5^x > 0$:

$$\frac{2^x}{2\log_3(x+2)} \leq \frac{3^{x^2+x}}{9\log_3(x+2)} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{2^{x-1} - 3^{x^2+x-2}}{\log_3(x+2)} \leq 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{2^{x-1} - 3^{(x-1)(x+2)}}{\log_3(x+2)} \leq 0.$$

Неравенство уже намного проще, чем исходное. Но основания степеней разные! Чтобы применить метод рационализации, нам придется представить 2^{x-1} в виде степени с основанием 3.

$$2^{x-1} = 3^{\log_3 2^{x-1}} = 3^{(x-1)\log_3 2}.$$

Неравенство примет вид:

$$\frac{3^{(x-1)\log_3 2} - 3^{(x-1)(x+2)}}{\log_3 (x+2)} \leq 0.$$

Воспользуемся методом замены множителя. Множитель вида $h^f - h^g$ можно заменить на $(h-1)(f-g)$. Да и логарифм в знаменателе можно заменить на выражение $x+1$.

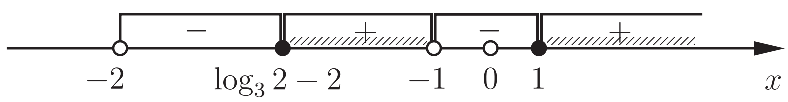
$$\frac{(x-1)(x-(\log_3 2 - 2))}{x+1} \geq 0.$$

Оценим $\log_3 2 - 2$. Это необходимо сделать, чтобы правильно расставить точки на числовой прямой.

$$\log_3 1 < \log_3 2 < \log_3 3;$$

$$0 < \log_3 2 < 1;$$

$$-2 < \log_3 2 - 2 < -1.$$



Ответ: $x \in [\log_3 2 - 2;\ -1) \cup [1;\ +\infty)$.

Еще несколько сложных неравенств из тренировочных вариантов 2011 года.

7. $\dfrac{10^{\log_2 x}}{2x^2(x+1)} \leq \dfrac{\left(15 \cdot 3^{\log_2 x}\right)^{\log_2 x}}{9x^2(x+1)}$.

Постараемся упростить это неравенство.
Область допустимых значений:

$$\begin{cases} x > 0; \\ x+1 \neq 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $x > 0$. Это хорошо, потому что при данных значениях x выражение $x+1$ строго положительно, следовательно, мы можем умножить на него обе части неравенства. Да и на x^2 тоже можно умножить обе части неравенства, и тогда оно станет проще:

$$\frac{10^{\log_2 x}}{2} \leq \frac{15^{\log_2 x} \cdot 3^{\log_2^2 x}}{9}.$$

Преобразуем числители выражений в левой и правой части и сделаем замену $\log_2 x = t$:

$$\frac{2^t \cdot 5^t}{2} \leq \frac{3^t \cdot 5^t \cdot 3^{t^2}}{9}.$$

Теперь обе части неравенства можно сократить на $5^t > 0$.

$$2^{t-1} \le 3^{x^2+x-2};$$

$$2^{t-1} - 3^{(x+2)(x-1)} \le 0.$$

Поскольку $2 = 3^{\log_3 2}$, выражение 2^{t-1} можно записать как $3^{(t-1)\cdot\log_3 2}$.

$$3^{(t-1)\cdot\log_3 2} \le 3^{(t+2)(t-1)};$$

$$(t-1)\cdot\log_3 2 \le (t-1)\,(t+2)\,;$$

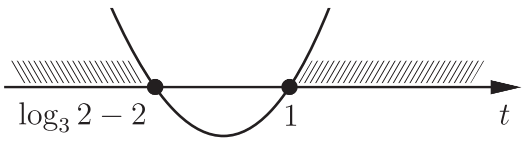
$$(t-1)\cdot\log_3 2 - (t-1)\,(t+2) \le 0.$$

$$(t-1)\,(\log_3 2 - t - 2) \le 0;$$

$$(t-1)\,(t - (\log_3 2 - 2)) \le 0.$$

Заметим, что $\log_3 2 - 2 < 0$.

Мы получили квадратичное неравенство относительно t. Решим его:



Итак, $t \ge 1$ или $t \le \log_3 2 - 2$.

Вернемся к переменной x:

$\log_2 x \ge 1$	или	$\log_2 x \le \log_3 2 - 2;$
$x \ge 2;$		$0 < x \le 2^{\log_3 2 - 2}.$

Ответ: $x \in (0;\ \log_3 2 - 2] \cup [2;\ +\infty)$.

8. Еще одна задача из той же серии.

$$\frac{14^{\log_2(4x)}}{7\cdot\log_2^2(32x)\cdot\log_2(0{,}25x)} \ge \frac{\left(4\cdot 2^{\log_2(4x)}\right)^{\log_2(4x)}}{4\cdot\log_2^2(32x)\cdot\log_2(0{,}25x)}.$$

Запишем ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0; \\ 32x \ne 1; \\ 0{,}25x \ne 1. \end{cases}$$

$x \in \left(0;\ \frac{1}{32}\right) \cup \left(\frac{1}{32};\ 4\right) \cup (4;\ +\infty)\,.$

Умножим обе части неравенства на $\log_2^2 32x > 0$. Постараемся упростить числители выражений в левой и правой части.

$$\frac{7^{\log_2(4x)} \cdot 2^{\log_2(4x)}}{7 \cdot \log_2(0{,}25x)} \geq \frac{4^{\log_2(4x)} \cdot 2^{(\log_2(4x))^2}}{4 \cdot \log_2(0{,}25x)}.$$

Поделим обе части неравенства на $2^{\log_2(4x)} > 0$.

$$\frac{7^{\log_2(4x)}}{7 \cdot \log_2(0{,}25x)} \geq \frac{2^{(\log_2(4x))^2 + \log_2(4x)}}{4 \cdot \log_2(0{,}25x)};$$

$$\frac{7^{\log_2(4x)-1} - 2^{\left((\log_2(4x))^2 + \log_2(4x) - 2\right)}}{\log_2(0{,}25x)} \geq 0.$$

Хорошо бы сделать замену. Пусть $\log_2(4x) = t$. Тогда:

$$\log_2 x = t - 2;$$

$$\log_2(0{,}25x) = \log_2\left(\frac{1}{4}\right) + \log_2 x = \log_2 x - 2 = t - 4.$$

Неравенство примет вид:

$$\frac{7^{t-1} - 2^{t^2+t-2}}{t-4} \geq 0.$$

Мы уже знаем, как представить число 7 в виде степени числа 2: $7 = 2^{\log_2 7}$.

$$\frac{2^{(t-1)\cdot\log_2 7} - 2^{(t-1)(t+2)}}{t-4} \geq 0.$$

Применим метод рационализации.

$$\frac{(t-1)\cdot\log_2 7 - (t-1)(t+2)}{t-4} \geq 0;$$

$$\frac{(t-1)(\log_2 7 - t - 2)}{t-4} \geq 0.$$

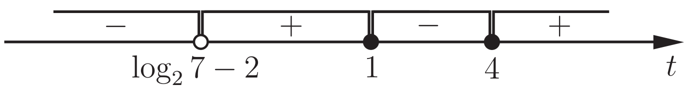
Оценим $\log_2 7 - 2$:

$$4 < 7 < 8;$$

$$\log_2 4 < \log_2 7 < \log_2 8;$$

$$2 < \log_2 7 < 3;$$

$$0 < \log_2 7 - 2 < 1.$$



$t \le \log_2 7 - 2$ или $1 \le t < 4;$

$\log_2 (4x) \le \log_2 7 - 2;$ $\quad 1 \le \log_2 (4x) < 4;$

$\log_2 (4x) \le \log_2 \frac{7}{4};$ $\quad \log_2 2 \le \log_2 (4x) < \log_2 16;$

$0 < x \le \frac{7}{16};$ $\quad \frac{1}{2} \le x < 4.$

Ответ: $x \in \left(0;\ \dfrac{1}{32}\right) \cup \left(\dfrac{1}{32};\ \dfrac{7}{16}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2};\ 4\right).$

9. Еще одна задача-страшилка из того же сборника:

$$\frac{\log_{2^{((x-1)^2-1)}} \left(\log_{(2x^2+10x+15)} (x^2+2x)\right)}{\log_{2^{((x-1)^2-1)}} (x^2+10x+26)} \ge 0.$$

Начнем с ОДЗ. Условий будет много — все выражения под логарифмами должны быть положительны, все основания логарифмов положительны и не равны единице, и еще знаменатель не равен нулю.

$$\begin{cases} 2^{(x-1)^2-1} \ne 1; \\ 2x^2+10x+15 > 0 \quad - \quad \text{верно при любом } x; \\ 2x^2+10x+15 \ne 1 \quad - \quad \text{верно при любом } x; \\ x^2+2x > 0; \\ x^2+10x+26 > 0 \quad - \quad \text{верно при любом } x; \\ x^2+10x+26 \ne 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)^2 - 1 \ne 0; \\ x(x+2) > 0; \\ x \ne -5. \end{cases}$$

ОДЗ: $x \in (-\infty;\ -5) \cup (-5;\ -2) \cup (0;\ +\infty).$

Применим в левой части неравенства формулу перехода к другому основанию:

$$\frac{\log_c b}{\log_c a} = \log_a b;$$

$$\log_{x^2+10x+26} \left(\log_{2x^2+10x+15} (x^2+2x)\right) \ge 0.$$

Последовательно применим метод замены множителя, то есть метод рационализации.

Напомним, что множитель $\log_h f$ можно заменить на $(h-1)(f-1)$, а множитель $(\log_h f - 1)$ — на $(h-1)(f-h)$.

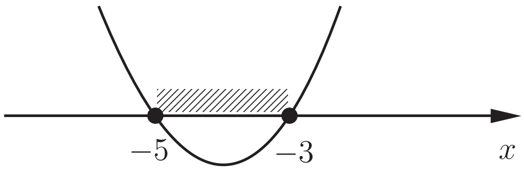
$$\left(x^2+10x+25\right)\left(\log_{2x^2+10x+15} (x^2+2x) - 1\right) \ge 0;$$

$$\left(x^2+10x+25\right)\left(2x^2+10x+14\right)\left(x^2+2x-2x^2-10x-15\right)\geq 0;$$

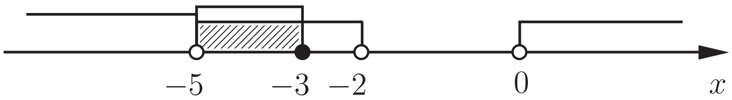
$$(x+5)^2\left(2x^2+10x+14\right)\left(-x^2-8x-15\right).$$

Поскольку $(x+5)^2>0$ при $x\in$ ОДЗ, а $2x^2+10x+14>0$ при всех x, получим:

$$x^2+8x+15\geq 0.$$



С учетом ОДЗ:



Ответ: $x\in(-5;\ -3]$.

10. Разберем еще одну задачу, появившуюся в 2010 году на пробном ЕГЭ. По сравнению с неравенствами 2011 года она может показаться простой, однако в ней спрятаны целых две ловушки для невнимательных абитуриентов.

$$\log_{x+2}\left(36+16x-x^2\right)-\frac{1}{16}\log^2_{x+2}(x-18)^2\geq 2.$$

Запишем ОДЗ:

$$\begin{cases} x+2>0\\ x+2\neq 1\\ 36+16x-x^2>0\\ x\neq 18\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases} x>-2\\ x\neq -1\\ x\in(-2;\ 18)\end{cases}$$

Итак, $x\in(-2;\ -1)\cup(1;\ 18)$. Это ОДЗ.

Обратите внимание, что $36+16x-x^2=-(x+2)(x-18)$. Это пригодится вам при решении неравенства.

Упростим исходное неравенство:

$$\log_{x+2}\left((18-x)(x+2)\right)-\frac{1}{16}\log^2_{x+2}(x-18)^2\geq 2;$$

$$1+\log_{x+2}(18-x)-\frac{1}{16}\log^2_{x+2}(x-18)^2\geq 2.$$

Теперь главное — не спешить. Мы уже говорили, что задача непростая — в ней расставлены ловушки. В первую вы попадете, если напишете, что $\log_{x+2}(x-18)^2=$

$2\log_{x+2}(x-18)$. Ведь выражение $\log_{x+2}(x-18)$ в данном случае не имеет смысла, поскольку $x<18$.

Как же быть? Вспомним, что $(x-18)^2=(18-x)^2$. Тогда:

$$1+\log_{x+2}(18-x)-\frac{1}{16}\log^2_{x+2}(18-x)^2\geq 2.$$

Вторая ловушка — попроще. Запись $\log^2_a b$ означает, что сначала надо вычислить логарифм, а потом возвести полученное выражение в квадрат. Поэтому:

$$\log^2_{x+2}(18-x)^2=\left(\log_{x+2}(18-x)^2\right)^2=\left(2\log_{x+2}(18-x)\right)^2=4\log^2_{x+2}(18-x).$$

Дальше — всё просто. Сделаем замену $\log_{x+2}(18-x)=t$.

$$t-\frac{1}{4}t^2\geq 1;$$

$$t^2-4t+4\leq 0;$$

$$(t-2)^2\leq 0.$$

Выражение в левой части этого неравенства не может быть отрицательным, поэтому $t=2$. Тогда:

$$\log_{x+2}(18-x)=2;$$

$$\log_{x+2}(18-x)=\log_{x+2}(x+2)^2;$$

$$18-x=x^2+4x+4;$$

$$x^2+5x-14=0;$$

$$x_1=-7 \text{ — не удовлетворяет ОДЗ};$$

$$x_2=2.$$

Ответ: 2.

Рекомендуемая литература:

1. Пособие по решению заданий типа С3 образца 2011 года. Авторы: Корянов А.Г.и Прокофьев А.А.

2. ЕГЭ 2010 Математика. Задача С3. Авторы: Сергеев И.Н. и Панферов В.С.