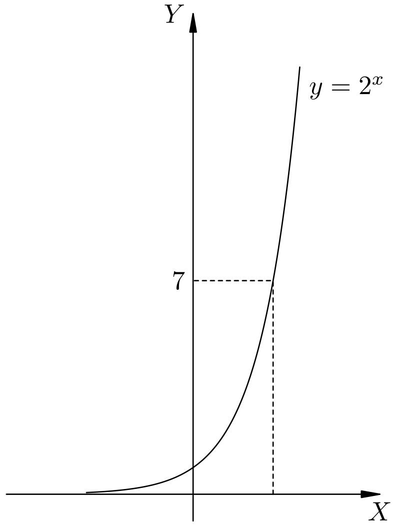
Логарифмы

Предыдущую статью о показательных уравнениях мы начали с уравнения $2^x = 8$. Там всё было ясно: $x = 3$.

А теперь рассмотрим уравнение $2^x = 7$.

По графику функции $y = 2^x$ мы видим, что это уравнение имеет корень, и притом единственный.



Ясно, что этот корень — не целое число (так как $2^2 = 4$, $2^3 = 8$). Более того, оказывается, что он не является даже рациональным числом, т. е. не представляется в виде обыкновенной дроби. Интуитивно мы чувствуем лишь, что он меньше 3, но не намного.

Этот корень обозначается $\log_2 7$ (читается: «логарифм семи по основанию два». Он является иррациональным числом, т. е. бесконечной непериодической десятичной дробью. Калькулятор даёт: $\log_2 7 = 2,807354922057604107\ldots$

Итак, наше число $\log_2 7$ — это показатель степени, в которую надо возвести 2, чтобы получить 7.

Теперь дадим общее определение логарифма. Пусть $a > 0$ и $a \neq 1$ (условия те же, что и для основания показательной функции).

Определение. Логарифм положительного числа b по основанию a (обозначается $\log_a b$) — это показатель степени, в которую надо возвести a, чтобы получить b.

Иными словами,

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b.$$

Например:

$$\log_2 8 = 3, \text{ так как } 2^3 = 8;$$
$$\log_7 49 = 2, \text{ так как } 7^2 = 49;$$
$$\log_5 \frac{1}{5} = -1, \text{ так как } 5^{-1} = \frac{1}{5};$$
$$\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}, \text{ так как } 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

Логарифм с основанием 10 называется *десятичным* и обозначается lg. Например, $\lg 100 = 2$, $\lg 1000 = 3$, $\lg 0,01 = -2$.

Логарифм с основанием e называется *натуральным* и обозначается ln.

Обратите внимание: *логарифм определён только для положительных чисел*. Причина заключается в том, что показательная функция может принимать лишь положительные значения. Например, число $\log_2(-4)$ не существует: в какую бы степень мы ни возводили 2, мы никогда не получим -4.

Не забывайте также про ограничения на основание логарифма: $0 < a < 1$ или $a > 1$.

Основные формулы

По определению, $\log_a b$ — это показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b:

$$a^{\log_a b} = b. \tag{1}$$

Формула (1) называется *основным логарифмическим тождеством.*

Вот ещё один вариант записи определения логарифма:

$$\log_a a^x = x.$$

Перечислим свойства логарифмов. Они являются простыми следствиями правил действия со степенями. Все логарифмы ниже считаются определёнными.

Логарифм произведения — это сумма логарифмов:

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c. \tag{2}$$

Логарифм частного — это разность логарифмов:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c. \tag{3}$$

Показатель степени логарифмируемого числа «спрыгивает» перед логарифмом:

$$\log_a b^m = m \log_a b. \tag{4}$$

Показатель степени основания логарифма тоже «спрыгивает», но в виде обратного числа:

$$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b. \tag{5}$$

Формулы (4) и (5) вместе дают:

$$\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b. \tag{6}$$

В частности, если $m = n$, мы получаем формулу:

$$\log_{a^n} b^n = \log_a b. \tag{7}$$

Например, $\log_4 9 = \log_{2^2} 3^2 = \log_2 3$.

Наконец, важнейшая формула перехода к новому основанию:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}\,. \tag{8}$$

В частности, если $c = b$, то $\log_b b = 1$, и тогда:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}\,. \tag{9}$$

Задача B7

Приведём несколько примеров из банка заданий ЕГЭ (задача B7).

1. $\log_3 8,1 + \log_3 10 = \log_3(8,1 \cdot 10) = \log_3 81 = 4$ (применили формулу (2) суммы логарифмов).

2. $8^{2\log_8 3} = (8^{\log_8 3})^2 = 3^2 = 9$ (применили основное логарифмическое тождество(1)).

3. $\log^2_{\sqrt{7}} 49 = (\log_{\sqrt{7}} 49)^2 = (\log_{\sqrt{7}} 7^2)^2 = (2\log_{\sqrt{7}} 7)^2 = (2 \cdot 2)^2 = 16$ (применили формулу (4)).

4. $\log_{0,8} 3 \cdot \log_3 1,25 = \log_{0,8} 3 \cdot \frac{\log_{0,8} 1,25}{\log_{0,8} 3} = \log_{0,8} 1,25 = \log_{\frac{4}{5}} \frac{5}{4} = -1$ (применили формулу (9), перейдя к новому основанию $0,8$).

5. $\frac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}} = 9^{\log_5 50 - \log_5 2} = 9^{\log_5 25} = 9^2 = 81$ (применили формулу (3) разности логарифмов).

Немного истории

Теперь вы поняли, что такое логарифмы и как ими пользоваться. Но для чего они всё-таки нужны? Или это просто такая математическая игрушка с хитрой инструкцией по применению?

Понятие логарифма и логарифмические таблицы появились в 17 веке, и значение их было огромно.

Это в наши дни вычисления не представляют труда — у каждого есть калькулятор. А как считали в «докомпьютерные» времена?

Складывать и вычитать можно было на счётах, а вот умножать и делить приходилось «в столбик» — медленно и трудно.

В 15–17 веках, в эпоху великих географических открытий, стали бурно развиваться торговля, экономика и наука. Требования к математике росли: расчёты становились более сложными, а точность — например, для решения навигационных задач — нужна была всё более высокая.

Необходим был инструмент, позволяющий упростить и ускорить расчёты, и таким инструментом явились логарифмы.

Предположим, что b и c — большие числа, которые надо перемножить. Появление таблиц логарифмов (например, с основанием 10) существенно упростило эту задачу. Теперь вычислителю достаточно было найти по таблицам десятичные логарифмы чисел b и c, сложить их (на счётах) и получить логарифм произведения:

$$\lg b + \lg c = \lg(bc).$$

А затем по таблице логарифмов найти само произведение чисел b и c.

Недаром французский математик и астроном Лаплас сказал, что изобретение логарифмов удлинило жизнь вычислителей. Логарифмическая линейка (которой инженеры пользовались до 70-х годов двадцатого века) была не менее прогрессивным изобретением, чем современный калькулятор.

Но это еще не всё! Мы не занимались бы логарифмами, если бы они имели лишь историческую, «музейную» ценность. О неожиданных применениях логарифмов мы расскажем в следующей статье, посвящённой логарифмической функции.