Логарифмическая функция

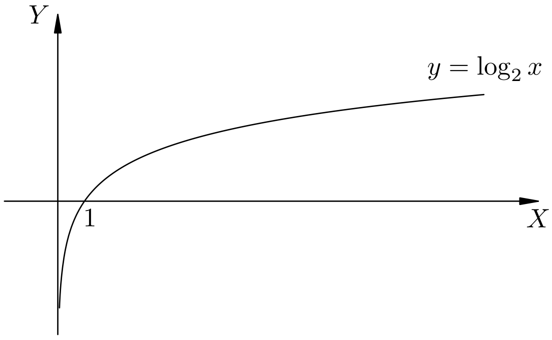
Вспомним, что $\log_a b$ (логарифм числа b по основанию a) — это показатель степени, в которую нужно возвести a, чтобы получить b. При этом $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Зафиксируем некоторое основание a. Тогда каждому положительному числу x можно поставить в соответствие число $\log_a x$ — показатель степени, в которую нужно возвести a, чтобы получить x. Иными словами, можно задать *логарифмическую функцию* $y = \log_a x$.

Пусть $a = 2$. Построим график функции $y = \log_2 x$.

x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

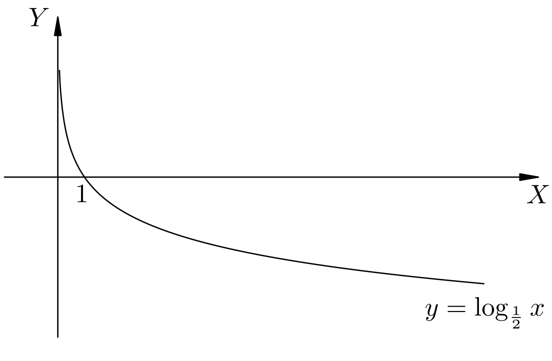
Функция монотонно возрастает:



Теперь возьмём $a = \frac{1}{2}$ и построим график функции $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
y	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4

Функция монотонно убывает:



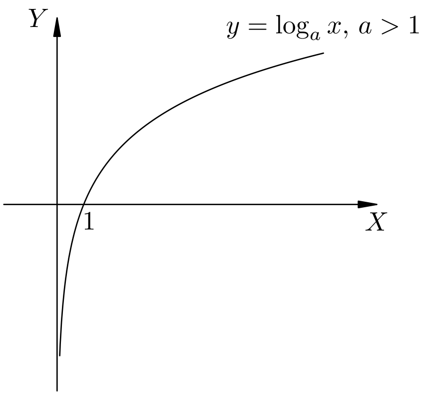
Эти два графика полностью отражают поведение логарифмической функции при различных значениях a. Сформулируем важнейшие свойства логарифмической функции $y = \log_a x$.

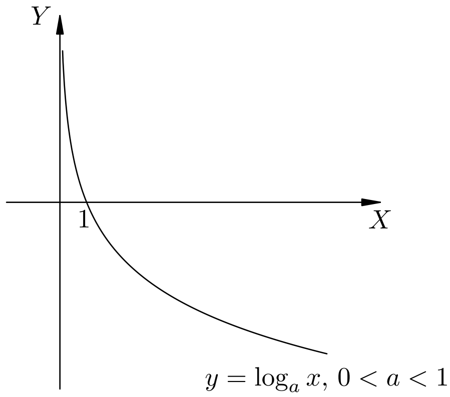
1. Область определения — все положительные числа: $D(y) = (0; +\infty)$.

2. Область значений — все действительные числа: $E(y) = (-\infty; +\infty)$.

3. Поскольку $\log_a 1 = 0$, график проходит через точку $(1; 0)$.

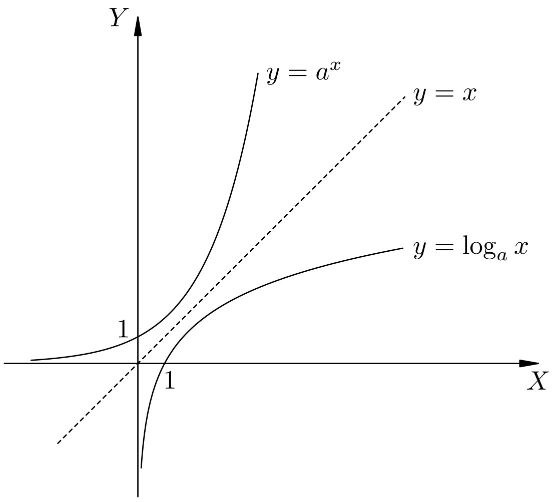
4. Функция монотонно возрастает при $a > 1$ и монотонно убывает при $0 < a < 1$:





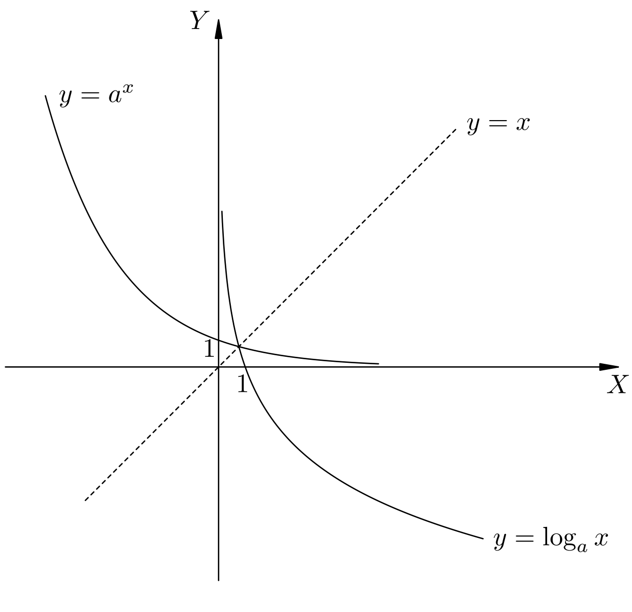
Заметим, что тем же свойством обладает и показательная функция $y = a^x$: она также возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$. Это, разумеется, не случайно.

Возьмём, к примеру, $a > 1$ и изобразим на одном чертеже графики данных функций:



Мы видим, что имеется сходство формы графиков: они как будто нарисованы по одному шаблону (просто шаблон по-разному расположен на координатной плоскости). На самом деле наши графики симметричны относительно прямой $y = x$ — они являются зеркальным отражением друг друга!

Та же осевая симметрия относительно прямой $y = x$ имеет место и в случае $0 < a < 1$:

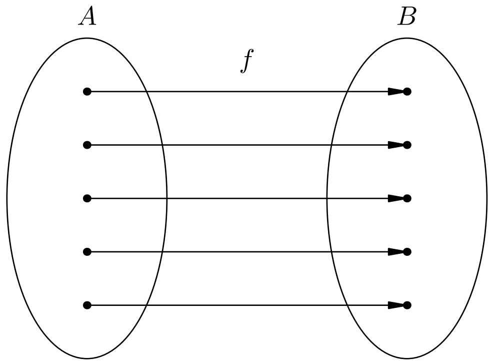


Данная симметрия проявляется ещё и в том, что область определения логарифмической функции является областью значений показательной функции, и наоборот.

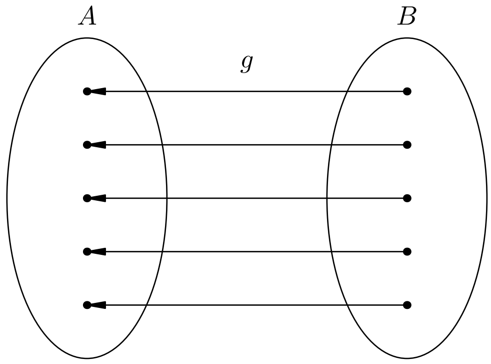
Логарифмическая функция $y = \log_a x$ и показательная функция $y = a^x$ являются *обратными* друг к другу. Поясним, что это означает.

Вспомним определение функции. Числовая функция $y = f(x)$ — это такое соответствие между двумя числовыми множествами A и B, при котором каждому числу $x \in A$ отвечает одно-единственное число $y \in B$. Множество A называется при этом областью определения функции, множество B — областью значений.

Пусть соответствие f является взаимно-однозначным:



Тогда существует функция g, которая действует в обратную сторону: каждому числу $y \in B$ она ставит в соответствие одно-единственное число $x \in A$, такое, что $f(x) = y$:



Функция g называется *обратной* к функции f. Точно так же и функция f будет обратной к функции g.

Если мы возьмём какое-либо число $x \in A$ и подействуем на него функцией f, то получим число $y = f(x) \in B$. Теперь на полученное число y подействуем функцией g. Куда попадём? Правильно, вернёмся к исходному числу x. Это можно записать так:

$$g(f(x)) = x. \tag{1}$$

Последовательное применение двух взаимно-обратных действий возвращает нас в исходную точку. Как и в жизни: сначала открыли дверь, а потом совершили обратное действие — закрыли дверь; в итоге вернулись к начальной ситуации.

Так, если возвести число 3 в степень x, а затем совершить обратное действие — взять от полученного числа 3^x логарифм по основанию 3 — мы вернёмся к исходному числу x:

$$\log_3 3^x = x.$$

Это конкретный пример абстрактной записи (1).

Вам встречались и другие примеры взаимно-обратных функций. Это:

- $y = x^2$ (при $x \geqslant 0$) и $y = \sqrt{x}$;
- $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$;
- $y = \sin x$ (при $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$) и $y = \arcsin x$.

Во всех этих (и им подобных) случаях выполняется равенство (1), а графики функций оказываются симметричными относительно прямой $y = x$. Проверьте это для трёх приведённых примеров!

Но вернёмся к логарифмам. Мы обещали рассказать об их практическом значении. Где их можно встретить?

Оказывается, для этого далеко ходить не надо.

Наши органы чувств «сконструированы» так, что могут работать в широчайших диапазонах. Световые потоки от Солнца, от электрической лампочки и от далёких звёзд различаются на несколько порядков. Но мы видим и яркое солнце, и едва заметные звёзды. Мы слышим шорох листьев и грохот грома, а ведь интенсивность этих звуков также различается в миллиарды раз.

Как это происходит? Дело в том, что глаз и ухо воспринимают именно логарифм величины внешнего воздействия. Это закон Вебера-Фехнера, или основной психофизический закон: *интенсивность воспринимаемого нами ощущения пропорциональна логарифму силы раздражения*. Например, при увеличении звукового давления в 10 раз нам кажется, что громкость возросла вдвое.

Подробнее о логарифмической шкале наших ощущений можно почитать в статье «Чувств наших логарифмы» (журнал «Вокруг света», №10, 2010; http://www.vokrugsveta.ru/telegraph/theory/767/)