

Статья написана в соавторстве с А. Г. Малковой

## Уравнения и неравенства с модулем

Данная статья посвящена приёмам решения различных уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля.

Если на экзамене вам попадётся уравнение или неравенство с модулем, его можно решить, вообще не зная никаких специальных методов и пользуясь только определением модуля. Правда, занять это может часа полтора драгоценного экзаменационного времени.

Поэтому мы и хотим рассказать вам о приёмах, упрощающих решение таких задач.

Прежде всего вспомним, что

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим различные типы *уравнений* с модулем. (К неравенствам перейдём позже.)

### Слева модуль, справа число

Это самый простой случай. Решим уравнение  $|x^2 - 5x + 4| = 4$ .

Есть только два числа, модули которых равны четырём. Это 4 и  $-4$ . Следовательно, уравнение равносильно совокупности двух простых:

$$x^2 - 5x + 4 = 4 \quad \text{или} \quad x^2 - 5x + 4 = -4.$$

Второе уравнение не имеет решений. Решения первого:  $x = 0$  и  $x = 5$ .

Ответ: 0; 5.

### Переменная как под модулем, так и вне модуля

Здесь приходится раскрывать модуль по определению... или соображать!

1.  $|2 - x| = 5 - 4x$

Уравнение распадается на два случая, в зависимости от знака выражения под модулем. Другими словами, оно равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 2 - x \geq 0, \\ 2 - x = 5 - 4x, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2 - x < 0, \\ x - 2 = 5 - 4x. \end{cases}$$

Решение первой системы:  $x = 1$ . У второй системы решений нет.

Ответ: 1.

2.  $x^2 + 4|x - 3| - 7x + 11 = 0$ .

*Первый случай:*  $x \geq 3$ . Снимаем модуль:

$$\begin{aligned} x^2 + 4(x - 3) - 7x + 11 &= 0, \\ x^2 - 3x - 1 &= 0, \\ x_1 &= \frac{3 + \sqrt{13}}{2}, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}. \end{aligned}$$

Число  $x_2$ , будучи отрицательным, не удовлетворяет условию  $x \geq 3$  и потому не является корнем исходного уравнения.

Выясним, удовлетворяет ли данному условию число  $x_1$ . Для этого составим разность и определим её знак:

$$x_1 - 3 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} - 3 = \frac{\sqrt{13} - 3}{2} = \frac{\sqrt{13} - \sqrt{9}}{2} > 0.$$

Значит,  $x_1$  больше трёх и потому является корнем исходного уравнения.

*Второй случай:*  $x < 3$ . Снимаем модуль:

$$\begin{aligned} x^2 + 4(3 - x) - 7x + 11 &= 0, \\ x^2 - 11x + 23 &= 0, \\ x_3 &= \frac{11 + \sqrt{29}}{2}, \quad x_4 = \frac{11 - \sqrt{29}}{2}. \end{aligned}$$

Число  $x_3$  больше, чем  $11/2$ , и потому не удовлетворяет условию  $x < 3$ . Проверим  $x_4$ :

$$x_4 - 3 = \frac{11 - \sqrt{29}}{2} - 3 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2} = \frac{\sqrt{25} - \sqrt{29}}{2} < 0.$$

Значит,  $x_4$  является корнем исходного уравнения.

Ответ:  $\frac{3 + \sqrt{13}}{2}$ ,  $\frac{11 - \sqrt{29}}{2}$ .

**3.**  $|2x^2 - 3x - 4| = 6x - 1$ .

Снимать модуль по определению? Страшно даже подумать об этом, ведь дискриминант — не точный квадрат. Давайте лучше воспользуемся следующим соображением: уравнение вида  $|A| = B$  равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} A = B, \\ B \geq 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} A = -B, \\ B \geq 0. \end{cases}$$

То же самое, но немного по-другому:

$$|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} \left[ \begin{array}{l} A = B, \\ A = -B, \end{array} \right. \\ B \geq 0. \end{cases}$$

Иными словами, мы решаем два уравнения,  $A = B$  и  $A = -B$ , а потом отбираем корни, удовлетворяющие условию  $B \geq 0$ .

Приступаем. Сначала решаем первое уравнение:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x - 4 &= 6x - 1, \\ 2x^2 - 9x - 3 &= 0, \\ x_1 &= \frac{9 + \sqrt{105}}{4}, \quad x_2 = \frac{9 - \sqrt{105}}{4}. \end{aligned}$$

Затем решаем второе уравнение:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x - 4 &= 1 - 6x, \\ 2x^2 + 3x - 5 &= 0, \\ x_3 &= 1, \quad x_4 = -\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Теперь в каждом случае проверяем знак правой части:

$$6x_1 - 1 = 6 \cdot \frac{9 + \sqrt{105}}{4} - 1 = \frac{50 + 6\sqrt{105}}{4} > 0;$$

$$6x_2 - 1 = 6 \cdot \frac{9 - \sqrt{105}}{4} - 1 = \frac{50 - 6\sqrt{105}}{4} = \frac{\sqrt{2500} - \sqrt{3780}}{4} < 0;$$

$$6x_3 - 1 = 6 - 1 > 0;$$

$$6x_4 - 1 = -15 - 1 < 0.$$

Стало быть, годятся лишь  $x_1$  и  $x_3$ .

Ответ: 1,  $\frac{9 + \sqrt{105}}{4}$ .

### Квадратные уравнения с заменой $|x| = t$

Решим уравнение:  $x^2 + 2|x| - 3 = 0$ .

Поскольку  $x^2 = |x|^2$ , удобно сделать замену  $|x| = t$ . Получаем:

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = 1 \\ |x| = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ \text{решений нет} \end{cases}$$

Ответ:  $\pm 1$ .

### Модуль равен модулю

Речь идёт об уравнениях вида  $|A| = |B|$ . Это — подарок судьбы. Никаких раскрытий модуля по определению! Всё просто:

$$|A| = |B| \Leftrightarrow \begin{cases} A = B, \\ A = -B. \end{cases}$$

Например, рассмотрим уравнение:  $|3x^2 + 5x - 9| = |6x + 15|$ . Оно равносильно следующей совокупности:

$$\begin{cases} 3x^2 + 5x - 9 = 6x + 15, \\ 3x^2 + 5x - 9 = -6x - 15. \end{cases}$$

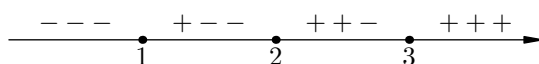
Остаётся решить каждое из уравнений совокупности и записать ответ.

### Два или несколько модулей

Решим уравнение:  $|x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4$ .

Не будем возиться с каждым модулем по отдельности и раскрывать его по определению — слишком много получится вариантов. Существует более рациональный способ — метод интервалов.

Выражения под модулями обращаются в нуль в точках  $x = 1$ ,  $x = 2$  и  $x = 3$ . Эти точки делят числовую прямую на четыре промежутка (интервала). Отметим на числовой прямой эти точки и расставим знаки для каждого из выражений под модулями на полученных интервалах. (Порядок следования знаков совпадает с порядком следования соответствующих модулей в уравнении.)



Таким образом, нам нужно рассмотреть четыре случая — когда  $x$  находится в каждом из интервалов.

*Случай 1:*  $x \geq 3$ . Все модули снимаются «с плюсом»:

$$\begin{aligned}x - 1 - 2(x - 2) + 3(x - 3) &= 4, \\x &= 5.\end{aligned}$$

Полученное значение  $x = 5$  удовлетворяет условию  $x \geq 3$  и потому является корнем исходного уравнения.

*Случай 2:*  $2 \leq x \leq 3$ . Последний модуль теперь снимается «с минусом»:

$$\begin{aligned}x - 1 - 2(x - 2) + 3(3 - x) &= 4, \\x &= 2.\end{aligned}$$

Полученное значение  $x$  также годится — оно принадлежит рассматриваемому промежутку.

*Случай 3:*  $1 \leq x \leq 2$ . Второй и третий модули снимаются «с минусом»:

$$\begin{aligned}x - 1 - 2(2 - x) + 3(3 - x) &= 4, \\4 &= 4.\end{aligned}$$

Мы получили верное числовое равенство при любом  $x$  из рассматриваемого промежутка. Это означает, что все числа из промежутка  $[1; 2]$  служат решениями данного уравнения.

*Случай 4:*  $x \leq 1$ . Все модули снимаются «с минусом»:

$$\begin{aligned}1 - x - 2(2 - x) + 3(3 - x) &= 4, \\x &= 1.\end{aligned}$$

Ничего нового. Мы и так знаем, что  $x = 1$  является решением.

Ответ:  $[1; 2] \cup \{5\}$ .

## Модуль в модуле

Решим уравнение:  $||3 - x| - 2x + 1| = 4x - 10$ .

Начинаем с раскрытия внутреннего модуля.

1)  $x \leq 3$ . Получаем:

$$\begin{aligned}|3 - x - 2x + 1| &= 4x - 10, \\|4 - 3x| &= 4x - 10.\end{aligned}$$

Выражение под модулем обращается в нуль при  $x = \frac{4}{3}$ . Данная точка принадлежит рассматриваемому промежутку. Поэтому приходится разбирать два подслучая.

1.1)  $\frac{4}{3} \leq x \leq 3$ . Получаем в этом случае:

$$\begin{aligned}3x - 4 &= 4x - 10, \\x &= 6.\end{aligned}$$

Это значение  $x$  не годится, так как не принадлежит рассматриваемому промежутку.

1.2)  $x \leq \frac{4}{3}$ . Тогда:

$$\begin{aligned}4 - 3x &= 4x - 10, \\x &= 2.\end{aligned}$$

Это значение  $x$  также не годится.

Итак, при  $x \leq 3$  решений нет. Переходим ко второму случаю.

2)  $x \geq 3$ . Имеем:

$$\begin{aligned}|x - 3 - 2x + 1| &= 4x - 10, \\|x + 2| &= 4x - 10.\end{aligned}$$

Здесь нам повезло: выражение  $x + 2$  положительно в рассматриваемом промежутке! Поэтому никаких подслучаев уже не будет: модуль снимается «с плюсом»:

$$\begin{aligned}x + 2 &= 4x - 10, \\x &= 4.\end{aligned}$$

Это значение  $x$  находится в рассматриваемом промежутке и потому является корнем исходного уравнения.

Ответ: 4.

Так решаются все задачи данного типа — раскрываем вложенные модули по очереди, начиная с внутреннего.

## Неравенства с модулем

Никаких принципиально новых идей здесь не возникает. Всеми необходимыми знаниями вы уже владеете. Поэтому мы разберём лишь две задачи. Остальное — на занятиях и в домашних заданиях.

1.  $2|x - 4| + |3x + 5| \geq 16$ .

1)  $x \geq 4$ . Имеем:

$$\begin{aligned}2(x - 4) + 3x + 5 &\geq 16, \\x &\geq \frac{19}{5}.\end{aligned}$$

Полученное неравенство выполняется при всех рассматриваемых  $x \geq 4$ . Иными словами, все числа из промежутка  $[4; +\infty)$  являются решениями нашего неравенства.

2)  $-\frac{5}{3} \leq x \leq 4$ . Имеем в данном случае:

$$\begin{aligned}2(4 - x) + 3x + 5 &\geq 16, \\x &\geq 3.\end{aligned}$$

Учитывая, в каком промежутке мы сейчас находимся, получаем в качестве решений исходного неравенства множество  $[3; 4]$ .

3)  $x \leq -\frac{5}{3}$ . Имеем:

$$\begin{aligned}2(4 - x) - 3x - 5 &\geq 16, \\x &\leq -\frac{13}{5}.\end{aligned}$$

Так как  $-\frac{13}{5} < -\frac{5}{3}$ , то все значения  $x$  из полученного промежутка  $(-\infty, -\frac{13}{5}]$  служат решениями исходного неравенства.

Остаётся объединить множества решений, полученные в трёх рассмотренных случаях.

Ответ:  $(-\infty, -\frac{13}{5}] \cup [3; +\infty)$ .

2.  $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3$ .

Это задача №6 теоретической части урока 8 книги В. В. Ткачука «Математика — абитуриенту». Автор решает её методом интервалов. Обязательно разберите авторское решение!

Заметим, что метод интервалов здесь проходит весьма безболезненно по той причине, что корни квадратного трёхчлена под модулем — целые числа. А если дискриминант не будет точным квадратом? Замените, например, под модулем  $-3$  на  $-5$ . Объём вычислительной работы тогда существенно возрастёт.

Мы покажем вам другой способ решения этой задачи, не зависящий от капризов дискриминанта.

Наше неравенство имеет вид  $|A| < B$ . Очевидны следующие утверждения.

- Если  $B \leq 0$ , то неравенство не имеет решений.
- Если  $B > 0$ , то неравенство равносильно двойному неравенству  $-B < A < B$  или, что то же самое, системе

$$\begin{cases} A < B, \\ A > -B. \end{cases}$$

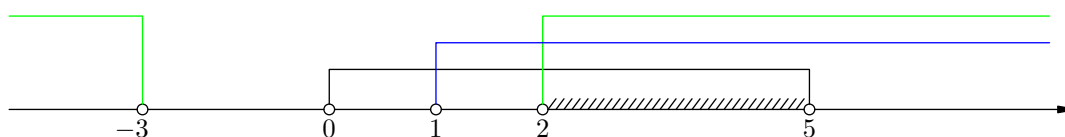
Иными словами, мы берём пересечение множества решений данной системы с множеством решений неравенства  $B > 0$ , то есть решаем систему

$$\begin{cases} A < B, \\ A > -B, \\ B > 0. \end{cases}$$

В нашей задаче получаем:

$$|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 3x - 3 \\ x^2 - 2x - 3 > -(3x - 3) \\ 3x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x < 0 \\ x^2 + x - 6 > 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 5 \\ \begin{cases} x > 2 \\ x < -3 \end{cases} \\ x > 1 \end{cases}$$

Изобразим множества решений этих неравенств на рисунке. Чёрным цветом показаны решения первого (двойного) неравенства; зелёный цвет — решения совокупности; синий цвет — решения последнего неравенства системы.



Решением системы служит пересечение этих множеств, т. е. множество, над которым присутствуют линии всех трёх цветов. Оно заштриховано.

Ответ:  $(2; 5)$ .