Тригонометрические уравнения

В данной статье мы расскажем об основных типах тригонометрических уравнений и методах их решения. Эта тема — одна из самых сложных для абитуриентов. Тригонометрические уравнения встречаются в части C вариантов ЕГЭ, а также в заданиях вступительных экзаменов в ВУЗы.

Некоторые из методов (например, замена переменной или разложение на множители) являются универсальными, то есть применяются и в других разделах математики. Другие являются специфическими именно для тригонометрии, и о них, как правило, рассказывает абитуриенту репетитор.

Необходимых формул по тригонометрии не так уж и много. Их нужно знать наизусть.

Любой метод решения тригонометрических уравнений состоит в том, чтобы привести их к простейшим, то есть к уравнениям вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$. Простейшие тригонометрические уравнения мы уже умеем решать.

Теперь — сами методы.

Замена переменной и сведение к квадратному уравнению

Это универсальный способ. Применяется в любых уравнениях — степенных, показательных, тригонометрических, логарифмических, каких угодно. Замена не всегда видна сразу, и уравнение нужно сначала преобразовать.

1. Рассмотрим уравнение

$$2\cos^2 x + 5\sin x = 5.$$

Преобразуем его, применив основное тригонометрическое тождество:

$$2(1-\sin^2 x) + 5\sin x = 5,$$
$$2\sin^2 x - 5\sin x + 3 = 0.$$

Заменяя $\sin x$ на t, приходим к квадратному уравнению:

$$2t^2 - 5t + 3 = 0.$$

Решая его, получим:

$$t_1 = \frac{3}{2}, \quad t_2 = 1.$$

Теперь вспоминаем, что мы обозначили за t. Первый корень приводит нас к уравнению $\sin x = \frac{3}{2}$. Оно не имеет решений, поскольку $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.

Второй корень даёт простейшее уравнение $\sin x = 1$. Решаем его: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Это и есть ответ.

2. Решить уравнение

$$3 + \cos 2x + 3\sqrt{2}\cos x = 0.$$

Здесь нужно применить формулу косинуса двойного угла. Какую именно? Судя по уравнению — ясно, что ту, которая с косинусом!

$$3 + 2\cos^2 x - 1 + 3\sqrt{2}\cos x = 0,$$
$$2\cos^2 x + 3\sqrt{2}\cos x + 2 = 0.$$

Теперь замена $t = \cos x$ и... дальше вы знаете.

3. Бывает, что оба рассмотренных выше метода нужно комбинировать. Например:

$$2\cos 2x - 3\cos^2 x - 2\sin x = 0.$$

Здесь всё подчиняется синусу. Именно через него выражаем косинус двойного угла, а $\cos^2 x$ выражаем из основного тригонометрического тождества:

$$2(1 - 2\sin^2 x) - 3(1 - \sin^2 x) - 2\sin x = 0.$$

Дальше понятно.

Разложение на множители

Очень хорошо, если уравнение удаётся представить в таком виде, что в левой части стоит произведение двух или нескольких множителей, а в правой части — ноль. Произведение двух или нескольких множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из них равен нулю. Сложное уравнение, таким образом, распадается в совокупность более простых.

1. Начнём с уравнения

$$\sin 2x = \cos x.$$

Применяем формулу синуса двойного угла:

$$2\sin x\cos x = \cos x.$$

Ни в коем случае не сокращайте на косинус! Ведь может случиться, что $\cos x$ обратится в нуль, и мы потеряем целую серию решений. Переносим всё в одну часть, и общий множитель — за скобки:

$$2\sin x\cos x - \cos x = 0,$$
$$\cos x(2\sin x - 1) = 0.$$

Полученное уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $\cos x = 0$ и $2\sin x - 1 = 0$. Решаем каждое из них и берём объединение множества решений.

Ответ: $x_1 = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $x_2 = (-1)^n\dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2. Рассмотрим уравнение

$$\sin 3x + \sin 7x = 2\sin 5x.$$

Применим формулу суммы синусов:

$$2\sin 5x\cos 2x = 2\sin 5x.$$

Дальше действуем так же, как и в предыдущей задаче:

$$2\sin 5x\cos 2x - 2\sin 5x = 0,$$
$$2\sin 5x(\cos 2x - 1) = 0.$$

Решаем уравнение $\sin 5x = 0$:

$$x = \frac{\pi n}{5}\,, n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Решаем уравнение $\cos 2x - 1 = 0$:

$$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Ну что, перечисляем обе серии (1) и (2) в ответе через запятую? Нет! Серия (2) является в данном случае частью серии (1). Действительно, если в формуле (1) число n кратно 5, то мы получаем все решения серии (2).

Поэтому ответ: $x = \frac{\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$.

3. Бывает, что перед разложением суммы или разности тригонометрических функций в произведение надо проделать обратную процедуру: превратить произведение в сумму (разность). Решим уравнение:

$$\sin 2x \sin 6x = \cos x \cos 3x.$$

Домножаем обе части на 2, преобразуем левую часть в разность косинусов, а правую часть — в сумму косинусов:

$$\begin{gathered} 2\sin 2x \sin 6x = 2\cos x \cos 3x, \\ \cos 4x - \cos 8x = \cos 2x + \cos 4x, \\ \cos 2x + \cos 8x = 0, \\ 2\cos 5x \cos 3x = 0. \end{gathered}$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

4. Ещё пример, где финальное разложение на множители поначалу замаскировано:

$$\sin^2 2x + \sin^2 3x = 1.$$

Здесь используем формулу понижения степени:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

(которая является ни чем иным, как переписанной в другом виде формулой косинуса двойного угла). Получаем:

$$\begin{gathered} \frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} = 1, \\ \cos 4x + \cos 6x = 0, \end{gathered}$$

и дальше ясно.

5. Многие оказываются в ступоре при виде следующего уравнения:

$$\sin 3x = \cos 5x.$$

Переносим косинус влево и применяем формулу приведения $\cos \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$:

$$\begin{gathered} \sin 3x - \cos 5x = 0, \\ \sin 3x - \sin \left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = 0. \end{gathered}$$

Дальше — дело техники.

6. А в этом примере нужны совсем другие манипуляции:

$$\sin 2x - \cos x + 2\sin x = 1.$$

Раскладываем синус двойного угла, всё собираем в левой части и группируем:

$$\begin{gathered} 2\sin x \cos x - \cos x + 2\sin x - 1 = 0, \\ \cos x(2\sin x - 1) + (2\sin x - 1) = 0, \\ (2\sin x - 1)(\cos x + 1) = 0. \end{gathered}$$

Цель достигнута.

Однородные уравнения

Рассмотрим уравнение:

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0.$$

Степень каждого слагаемого в левой части равна двум. Точно так же, как в обычном многочлене $a^2 + 2ab - 3b^2$ степень каждого слагаемого равна двум (степень одночлена — это сумма степеней входящих в него сомножителей).

Поскольку степени всех слагаемых одинаковы, такое уравнение называют *однородным.* Для однородных уравнений существует стандартный приём решения — деление обеих его частей на $\cos^2 x$. Возможность этого деления, однако, должна быть обоснована: а что, если косинус равен нулю?

Следующий абзац предлагаем выучить наизусть и всегда прописывать его при решении однородных уравнений.

Предположим, что $\cos x = 0$. *Тогда в силу уравнения и* $\sin x = 0$, *что противоречит основному тригонометрическому тождеству. Следовательно, любое решение данного уравнения удовлетворяет условию* $\cos x \neq 0$, *и мы можем поделить обе его части на* $\cos^2 x$.

В результате деления приходим к равносильному квадратному уравнению относительно тангенса:

$$\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 3 = 0,$$

и дальнейший ход решения трудностей не представляет.

1. Рассмотрим уравнение

$$10\sin^2 x + 5\sin x\cos x + \cos^2 x = 3.$$

Если бы в правой части стоял нуль, уравнение было бы однородным. Мы поправим ситуацию изящным приёмом: заменим число 3 на выражение $3(\sin^2 x + \cos^2 x)$:

$$10\sin^2 x + 5\sin x\cos x + \cos^2 x = 3(\sin^2 x + \cos^2 x),$$
$$7\sin^2 x + 5\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0,$$

и дело сделано.

2. Неожиданным образом сводится к однородному следующее уравнение:

$$3\cos x + 2\sin x = 1.$$

Казалось бы, где тут однородность? Переходим к половинному углу!

$$3\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) + 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2},$$
$$4\sin^2\frac{x}{2} - 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\cos^2\frac{x}{2} = 0,$$
$$2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1 = 0,$$
$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2},$$

откуда

$$x = 2\operatorname{arctg}\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Мы не случайно довели это уравнение до ответа. В следующем разделе оно будет решено другим методом, и ответ окажется внешне непохожим на этот.

Введение дополнительного угла

Этот метод применяется для уравнений вида $a\cos x + b\sin x = c$. Он присутствует в школьных учебниках. Правда, в них рассматриваются только частные случаи — когда числа a и b являются значениями синуса и косинуса углов в $30°$, $45°$ или $60°$.

1. Рассмотрим уравнение

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2.$$

Делим обе части на 2:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = 1.$$

Замечаем, что $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{\pi}{6}$:

$$\cos\frac{\pi}{6}\sin x + \sin\frac{\pi}{6}\cos x = 1.$$

В левой части получили синус суммы:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1,$$

откуда $x + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ и $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2. Другой пример:

$$\cos x + \sin x = 1.$$

Делим обе части на $\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Сделаем теперь для разнообразия в левой части косинус разности:

$$\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,$$

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ x_2 = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

3. Рассмотрим теперь общий случай — уравнение

$$a\cos x + b\sin x = c.$$

Делим обе части на $\sqrt{a^2+b^2}$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{4}$$

Для чего мы выполнили это деление? Всё дело в получившихся коэффициентах при косинусе и синусе. Легко видеть, что сумма их квадратов равна единице:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1.$$

Это означает, что данные коэффициенты сами являются косинусом и синусом некоторого угла φ:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi, \ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi.$$

Соотношение (4) тогда приобретает вид:

$$\cos\varphi\cos x + \sin\varphi\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\,,$$

или

$$\cos(x-\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\,.$$

Исходное уравнение сведено к простейшему. Теперь понятно, почему рассматриваемый метод называется *введением дополнительного угла*. Этим дополнительным углом как раз и является угол φ.

4. Снова решим уравнение

$$3\cos x + 2\sin x = 1.$$

Делим обе части на $\sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$:

$$\frac{3}{\sqrt{13}}\cos x + \frac{2}{\sqrt{13}}\sin x = \frac{1}{\sqrt{13}}.$$

Существует угол φ такой, что $\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{13}}$. Например, $\varphi = \arccos\frac{3}{\sqrt{13}}$. Получаем:

$$\cos\varphi\cos x + \sin\varphi\sin x = \frac{1}{\sqrt{13}}\,,$$

$$\cos(x-\varphi) = \frac{1}{\sqrt{13}}\,,$$

$$x-\varphi = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt{13}} + 2\pi n,$$

$$x = \varphi \pm \arccos\frac{1}{\sqrt{13}} + 2\pi n,$$

$$x = \arccos\frac{3}{\sqrt{13}} \pm \arccos\frac{1}{\sqrt{13}} + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

В предыдущем разделе мы решили это уравнение, сведя его к однородному, и получили в качестве ответа выражение (3). Сравните с полученным только что выражением. А ведь это одно и то же множество решений!

Универсальная подстановка

Запомним две важные формулы:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\,, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\,.$$

Их ценность в том, что они позволяют выразить синус и косинус через одну и ту же функцию — тангенс половинного угла. Именно поэтому они получили название *универсальной подстановки*.

Единственная неприятность, о которой не надо забывать: правые части этих формул не определены при $x = \pi + 2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. Поэтому если применение универсальной подстановки приводит к сужению ОДЗ, то данную серию нужно проверить непосредственно.

1. Решим уравнение
$$\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2.$$
Выражаем $\sin 2x$, используя универсальную подстановку:
$$\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} x = 2.$$
Делаем замену $t = \operatorname{tg} x$:
$$\frac{2t}{1+t^2} + t = 2.$$
Получаем кубическое уравнение:
$$t^3 - 2t^2 + 3t - 2 = 0,$$
$$(t-1)(t^2 - t + 2) = 0.$$
Оно имеет единственный корень $t = 1$. Стало быть, $\operatorname{tg} x = 1$, откуда $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Сужения ОДЗ в данном случае не было, так как уравнение с самого начала содержало $\operatorname{tg} x$.

2. Рассмотрим уравнение
$$6 + 6\cos x + 5\sin x \cos x = 0.$$
А вот здесь использование универсальной подстановки сужает ОДЗ. Поэтому сначала непосредственно подставляем $x = \pi + 2\pi n$ в уравнение и убеждаемся, что это — решение.

Теперь обозначаем $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ и применяем универсальную подстановку:
$$6 + 6\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{10t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = 0.$$
После простых алгебраических преобразований приходим к уравнению:
$$5t^3 - 6t^2 - 5t - 6 = 0,$$
$$(t-2)(5t^2 + 4t + 3) = 0,$$
$$t = 2.$$
Следовательно, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 2$ и $x = 2\operatorname{arctg} 2 + 2\pi n$.

Ответ: $x_1 = \pi + 2\pi n$, $x_2 = 2\operatorname{arctg} 2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Метод оценок

В некоторых уравнениях на помощь приходят оценки $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.

3. Рассмотрим уравнение
$$\sin 5x + \sin 9x = 2.$$
Так как оба синуса не превосходят единицы, данное равенство может быть выполнено лишь в том случае, когда *они равны единице одновременно*:
$$\begin{cases} \sin 5x = 1, \\ \sin 9x = 1. \end{cases}$$
Таким образом, должны одновременно выполняться следующие равенства:
$$\begin{cases} 5x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \\ 9x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi n}{5}, \\ x = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2\pi k}{9}, n, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Обратите внимание, что сейчас речь идёт о *пересечении* множества решений (а не об их объединении, как это было в случае разложения на множители). Нам ещё предстоит понять, какие значения x удовлетворяют обоим равенствам. Имеем:

$$\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5} = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{9}\,.$$

Умножаем обе части на 90 и сокращаем на π:

$$\begin{gathered} 9 + 36n = 5 + 20k, \\ 20k = 36n + 4, \\ 5k = 9n + 1. \end{gathered}$$

Правая часть, как видим, должна делиться на 5. Число n при делении на 5 может давать остатки от 0 до 4; иначе говоря, число n может иметь один из следующих пяти видов: $5m$, $5m+1$, $5m+2$, $5m+3$ и $5m+4$, где $m \in \mathbb{Z}$. Для того, чтобы $9n+1$ делилось на 5, годится лишь $n = 5m+1$.

Искать k, в принципе, уже не нужно. Сразу находим x:

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5} = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi(5m+1)}{5} = \frac{\pi}{2} + 2\pi m.$$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$.

4. Рассмотрим уравнение

$$\sin 2x \sin 5x = 1.$$

Ясно, что данное равенство может выполняться лишь в двух случаях: когда оба синуса одновременно равны 1 или -1. Действуя так, мы должны были бы поочерёдно рассмотреть две системы уравнений.

Лучше поступить по-другому: умножим обе части на 2 и преобразуем левую часть в разность косинусов:

$$\begin{gathered} 2\sin 2x \sin 5x = 2, \\ \cos 3x - \cos 7x = 2. \end{gathered}$$

Тем самым мы сокращаем работу вдвое, получая лишь одну систему:

$$\begin{cases} \cos 3x = 1, \\ \cos 7x = -1. \end{cases}$$

Имеем:

$$\begin{cases} 3x = 2\pi n \\ 7x = \pi + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2\pi n}{3}\,, \\ x = \dfrac{\pi}{7} + \dfrac{2\pi k}{7}\,, n, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ищем пересечение:

$$\frac{2\pi n}{3} = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi k}{7}\,.$$

Умножаем на 21 и сокращаем на π:

$$14n = 3 + 6k.$$

Данное равенство невозможно, так как в левой части стоит чётное число, а в правой — нечётное.

Ответ: решений нет.

5. Страшное с виду уравнение

$$\sin^5 x + \cos^8 x = 1$$

также решается методом оценок. В самом деле, из неравенств $|\sin x| \leqslant 1$, $|\cos x| \leqslant 1$ следует, что $\sin^5 x \leqslant \sin^2 x$, $\cos^8 x \leqslant \cos^2 x$. Следовательно, $\sin^5 x + \cos^8 x \leqslant \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, причём равенство возможно в том и только в том случае, когда

$$\begin{cases} \sin^5 x = \sin^2 x, \\ \cos^8 x = \cos^2 x. \end{cases}$$

Остаётся решить полученную систему. Это не сложно.

Учёт тригонометрических неравенств

Рассмотрим уравнение:

$$\sqrt{5\cos x - \cos 2x} + 2\sin x = 0.$$

Перепишем его в виде, пригодном для возведения в квадрат:

$$\sqrt{5\cos x - \cos 2x} = -2\sin x.$$

Тогда наше уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 5\cos x - \cos 2x = 4\sin^2 x, \\ \sin x \leqslant 0. \end{cases}$$

Решаем уравнение системы:

$$5\cos x - (2\cos^2 x - 1) = 4(1 - \cos^2 x),$$
$$2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0,$$
$$\left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \cos x = -3. \end{array} \right.$$

Второе уравнение данной совокупности не имеет решений, а первое даёт две серии:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Теперь нужно произвести отбор решений в соответствии с неравенством $\sin x \leqslant 0$. Серия x_1 не удовлетворяет этому неравенству, а серия x_2 удовлетворяет ему. Следовательно, решением исходного уравнения служит только серия x_2.

Ответ: $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Специальные приёмы

В этом разделе рассматриваются некоторые типы уравнений, приёмы решения которых нужно знать обязательно.

1. Рассмотрим уравнение

$$\cos 2x = \cos x + \sin x.$$

Это сравнительно редкий случай, когда используется *исходная* формула косинуса двойного угла:

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos x + \sin x,$$
$$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = \cos x + \sin x,$$
$$(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x - 1) = 0,$$
$$\left[\begin{array}{l} \cos x + \sin x = 0, \\ \cos x - \sin x = 1. \end{array}\right.$$

Каждое из уравнений полученной совокупности мы решать умеем.

2. Теперь рассмотрим такое уравнение:

$$\sin 2x = \cos x + \sin x + 1.$$

Метод решения будет совсем другим. Сделаем замену $t = \cos x + \sin x$. Как выразить $\sin 2x$ через t? Имеем:

$$t^2 = \cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x = 1 + \sin 2x,$$

откуда $\sin 2x = t^2 - 1$. Получаем:

$$t^2 - 1 = t + 1,$$
$$t^2 - t - 2 = 0,$$
$$t_1 = -1,\ t_2 = 2,$$
$$\left[\begin{array}{l} \cos x + \sin x = -1, \\ \cos x + \sin x = 2. \end{array}\right.$$

Как действовать дальше, мы знаем.

3. Надо обязательно помнить формулы косинуса и синуса тройного угла (чтобы не изобретать их на экзамене):

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$
$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

Вот, например, уравнение:

$$\sin 3x + 2\cos 2x = 2.$$

Оно сводится к уравнению относительно $\sin x$:

$$3\sin x - 4\sin^3 x + 2(1 - 2\sin^2 x) = 2,$$
$$4\sin^3 x + 4\sin^2 x - 3\sin x = 0,$$
$$\sin x(4\sin^2 x + 4\sin x - 3) = 0.$$

Дальше всё понятно.

4. Как бороться с суммой четвёртых степеней синуса и косинуса? Рассмотрим уравнение

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}\,.$$

Выделяем полный квадрат!

$$\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x - 2\sin^2 x\cos^2 x = \frac{5}{8}\,,$$
$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = \frac{5}{8}\,,$$
$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{5}{8}\,,$$
$$\sin^2 2x = \frac{3}{4}\,,$$
$$\sin 2x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$
$$2x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n,$$
$$x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}\,, n \in \mathbb{Z}.$$

5. А как быть с суммой шестых степеней? Рассмотрим такое уравнение:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}\,.$$

Раскладываем левую часть на множители как сумму кубов: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$. Получим:

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x) = \frac{1}{4}\,,$$
$$\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x = \frac{1}{4}\,.$$

С суммой четвёртых степеней вы уже умеете обращаться.

Мы рассмотрели основные методы решения тригонометрических уравнений. Знать их нужно обязательно, это — необходимая база.

В более сложных и нестандартных задачах нужно ещё догадаться, как использовать те или иные методы. Это приходит только с опытом. Именно этому мы и учим на наших занятиях.